Esame di Metodi Matematici

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 02 Febbraio 2009, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Si trovino tutte le radici dell'equazione $(\sin z)^2 - 9 = 0$.

Problema 2

Sia data la funzione $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $u(x,y) = \sin x \cosh y$ e $v(x,y) = \cos x \sinh y$.
a) Verificare che u e v verificano le condizioni di Cauchy-Riemann.
b) Scrivere $f(x,y)$ in termini della sola variabile z: $f(x,y) = g(z)$.
c) Calcolare

$$I = \oint_\gamma dz\, \frac{g(z) - 1}{(z - \frac{\pi}{2})^2}.$$

dove γ e' una curva chiusa orientata in senso antiorario che circonda il punto $z_0 = \frac{\pi}{2}$.

Problema 3

Sia data la funzione $f(x) = \sin x \cos x$. Si calcoli la sua ascissa di convergenza e la sua trasformata di Laplace $f_L(s)$. Verificare la correttezza di $f_L(s)$ facendo l'antitrasformata e riottenendo cosi' $f(x)$.

Problema 4

Si calcoli la seguente parte principale:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\sin x}{x - \frac{\pi}{4}}.$$

Si ricordi che $P\frac{1}{x-x_0} = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{x-x_0+i\eta} + i\pi\delta(x-x_0)$.

Problema 5

Sia data la matrice $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $f(\underline{A}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-\underline{A}}$ con $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$. Si ricordi che la curva γ deve contenere lo spettro di $\underline{A}$ e che $f(z)$ deve essere analitica al suo interno.

Problema 6

Si trovi la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{y(x)}{x}\frac{dy(x)}{dx} = e^{x^2}$$

con condizione al contorno $y(0) = 1$.

Soluzione Problema 1

Deve essere a) $\sin z = 3$ oppure b) $\sin z = -3$. Posto $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ nel caso a) si trova $e^{2iz} - 6ie^{iz} - 1 = 0$ e quindi $e^{iz} = i(3 \pm 2\sqrt{2})$ da cui le soluzioni $z_\pm(n) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i\ln(3 \pm 2\sqrt{2})$ mentre nel caso b) si trova $e^{2iz} + 6ie^{iz} - 1 = 0$ e quindi $e^{iz} = -i(3 \pm 2\sqrt{2})$ da cui le soluzioni $z_\pm(n) = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi - i\ln(3 \pm 2\sqrt{2})$.

Soluzione Problema 2

a) E' immediato verificare che $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y$ ed inoltre $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \sin x \sinh y$.
b) Considerando che $f(x, 0) = g(x)$ si trova $g(x) = \sin x$ e quindi $g(z) = \sin z$.
c) L'integrale puo' calcolarsi col metodo dei residui. Posto $z = \frac{\pi}{2} + w$ risulta $\sin z = \cos w$ e quindi

$$I = \oint_{\gamma'} dw\, \frac{\cos w - 1}{w^2}$$

dove γ' e' una curva chiusa che circonda l'origine. Sviluppando il $\cos w$ in serie di Taylor si trova il seguente sviluppo in serie di Laurent attorno a $w = 0$

$$\frac{\cos w - 1}{w^2} = -\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}w^2 - \frac{1}{6!}w^4 + \ldots$$

Essendo nulla la coda di Laurent se ne conclude che $I = 0$.

Soluzione Problema 3

L'ascissa di convergenza e' $\alpha = 0$. Risulta poi $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$. Scrivendo $\sin 2x = \frac{1}{2i}(e^{2ix} - e^{-2ix})$ si trova $f_L(s) = \frac{1}{(s-2i)(s+2i)}$. Per $x > 0$ l'antitrasformata si ottiene chiudendo il percorso di integrazione nel semipiano sinistro. Si trova cosi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{sx}}{(s-2i)(s+2i)} = \frac{e^{2ix}}{4i} - \frac{e^{-2ix}}{4i} = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Soluzione Problema 4

Utilizzando il suggerimento si trova

$$P\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\sin x}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{\eta \to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\sin x}{x - \frac{\pi}{4} + i\eta} + i\pi \sin\frac{\pi}{4}$$

Scrivendo poi $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ possiamo scomporre l'integrale a secondo membro in due integrali. Il primo puo' essere chiuso nel semipiano superiore e fornisce un risultato nullo essendo il polo $\frac{\pi}{4} - i\eta$ nel semipiano inferiore. Il secondo puo' essere chiuso nel semipiano inferiore e fornisce

$$\lim_{\eta \to 0}\frac{-1}{2i}\oint_\gamma dz\, \frac{e^{-iz}}{z - \frac{\pi}{4} + i\eta} = \lim_{\eta \to 0}\frac{-1}{2i}(-2\pi i)e^{-i(\frac{\pi}{4} - i\eta)} = \pi e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Ne segue che la parte principale e' $\pi e^{-i\frac{\pi}{4}} + i\pi \sin\frac{\pi}{4} = \pi\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ che e' una quantita' reale come deve essere.

Soluzione Problema 5

Il risolvente e' dato da $(z - \underline{A})^{-1} = \frac{1}{(z-(1+i))(z-(1-i))}\begin{pmatrix} z-1 & i \\ i & z-1 \end{pmatrix}$. Scegliendo una qualunque curva γ che contenga al suo interno i punti $1+i$ e $1-i$ ed al suo esterno i punti di non analiticita' 1 e -1 della funzione $f(z)$ si trova

$$f(\underline{A}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz \frac{1}{(z^2-1)(z-(1+i))(z-(1-i))}\begin{pmatrix} z-1 & i \\ i & z-1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione Problema 6

Si tratta di un'equazione separabile: $yy' = xe^{x^2}$. Integrando tra zero ed x si trova $y^2(x) - y^2(0) = e^{x^2} - 1$ ed utilizzando le condizioni al contorno $y^2(x) = e^{x^2}$ da cui $y(x) = \pm e^{x^2/2}$. La soluzione col segno meno deve essere scartata in quanto non soddisfa le condizioni al contorno. Dunque $y(x) = e^{x^2/2}$

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 02.02.09

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Valguarnera A	5	1	3	4	4	0	17/30
Dilodovico A	3	3	2	0	5	5	18/30
Puddi M	0	2	5	5	1	3	16/30
De Carolis D	0	2	2	0	0	1	5/30
D'Elia E	1	5	5	5	4	5	25/30
Impagnatiello A	1	0	3	2	3	1	10/30
Lucatelli E	1	3	5	5	3	5	22/30
Rubino P	1	2	3	5	2	5	18/30
Centurioni S	3	3	4	0	2	5	17/30
De Marchi F	1	5	2	4	2	5	19/30
Barbera D	0	5	5	3	1	2	16/30
Galeotti G	0	3	3	2	2	4	14/30
Iannaci A	0	3	5	0	1	3	12/30
Guarnieri L	1	3	5	5	5	5	24/30
House J N	0	1	4	1	2	5	13/30
D'Anna D	1	5	3	1	5	3	18/30
Magni C	0	1	5	5	1	3	15/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci