Esame di Metodi Matematici

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 02 Marzo 2009, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Sia k una costante reale positiva. Si determini per quale valore di k la funzione $u(x,y) = e^{2y}\cos kx$ e' armonica. Calcolare poi la funzione analitica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, di cui $u(x,y)$ e' la parte reale, tale che $f(0) = 0$. Si ricordi che $v(x,y) = v(x_0,y_0) - \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' \frac{\partial u}{\partial y}(x', y_0) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y' \frac{\partial u}{\partial x}(x, y')$. NB: La funzione $f(z)$ deve essere espressa in termini della sola variabile z.

Problema 2

Si calcoli il seguente integrale:

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{-1}^{\infty} dx \ \delta(\sin x) y^{\frac{x}{\pi}}$$

Problema 3

Si calcoli l'integrale sul piano complesso $I = \oint_\gamma dz \, \frac{1-\cos z}{z^7}$ dove γ e' una curva chiusa che circonda l'origine e orientata in senso antiorario.

Problema 4

Sia data la funzione periodica $f(x) = e^{e^{ix}}$.

a) Calcolare i coefficiecienti $f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \, e^{-ikx} f(x)$ dello sviluppo in serie di Fourier. Suggerimento: si effettui il cambio di variabile $z = e^{ix}$.

b) Utilizzando lo sviluppo trovato si calcoli il valore della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Problema 5

Utilizzando la formula $e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C_n(A,B)$ con $C_{n+1}(A,B) = [A, C_n(A,B)]$ e $C_0(A,B) = B$ calcolare $e^{\sigma_z}\sigma_x e^{-\sigma_z}$. Si ricordi che le matrici di Pauli sono

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e che soddisfano le regole di commutazione $[\sigma_i, \sigma_j] = i\sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Suggerimento: Si calcoli C_0, C_1 e C_2 e si riconosca la ricorrenza. Separare quindi la somma in due pezzi.

Problema 6

Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) + \ln(2)xy = \ln(4)x$$

con condizione al contorno $y(2) = -1$.

Soluzione Problema 1

Risulta $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 e^{2y}\cos kx$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4e^{2y}\cos kx$. L'unico valore positivo di k affinche' u sia armonica e' $k = 2$. Per tale valore di k risulta che $\frac{\partial u}{\partial x} = -2e^{2y}\sin 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{2y}\cos 2x$ e quindi utilizzando la formula nel testo dell'esercizio $v(x,y) = -e^{2y}\sin 2x + C$ con C costante da determinare imponendo che $f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = 0$ e dunque $C = i$. Infine, essendo $f(x) = u(x,0) + iv(x,0) = \cos 2x - i\sin 2x - 1 = e^{-2ix} - 1$ la funzione analitica cercata e' $f(z) = e^{-2iz} - 1$.

Soluzione Problema 2

Risulta $\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x - n\pi)$ e dunque $I = \int_{-1/2}^{1/2} dy \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \int_{-1/2}^{1/2} dy \frac{1}{1-y} = \ln(3/2) - \ln(1/2) = \ln 3$

Soluzione Problema 3

L'integrando ha nell'origine un polo di ordine 5. Utilizzando il teorema dei residui avremo

$$I = \frac{2\pi i}{4!}\left[\frac{d^4}{dz^4}\frac{1-\cos z}{z^2}\right]_{z=0} = \frac{2\pi i}{4!}\left[\frac{d^4}{dz^4}\frac{\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots}{z^2}\right]_{z=0} = \frac{2\pi i}{6!}$$

Soluzione Problema 4

a) Utilizzando il suggerimento del problema si trova $f_k = \frac{1}{2\pi i}\oint dz \frac{e^z}{z^{k+1}}$ dove l'integrale e' lungo un cerchio di raggio unitario percorso in senso antiorario. La funzione integranda ha un polo di ordine $k+1$ per $k \geq 0$ ed e' analitica per $k < 0$. Utilizzando il teorema dei residui troviamo

$$f_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \frac{1}{k!} & k \geq 0 \end{cases}$$

b) Lo sviluppo in serie di Fourier e' allora $e^{e^{ix}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{ikx}$. La serie dell'esercizio coincide con lo sviluppo di Fourier per $x = \pi$. Pertanto $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{e^{i\pi}} = \frac{1}{e}$.

Soluzione Problema 5

Risulta $C_0 = \sigma_x$, $C_1 = [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$, e $C_2 = [\sigma_z, C_1] = 2i[\sigma_z, \sigma_y] = 2^2\sigma_x = 2^2 C_0$. Pertanto $C_{2n} = 2^{2n}\sigma_x$ e $C_{2n+1} = i2^{2n+1}\sigma_y$. Separando la somma in contributi pari e dispari troviamo allora

$$e^{\sigma_z}\sigma_x e^{-\sigma_z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}C_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}C_{2n+1} = \cosh(2)\sigma_x + i\sinh(2)\sigma_y$$

Soluzione Problema 6

L'equazione differenziale e' della forma $y' + P(x)y = Q(x)$ con $P(x) = \ln(2)x$ e $Q(x) = \ln(4)x$. La soluzione piu' generale e' data da $y(x) = Ce^{-I(x)} + e^{-I(x)}\int_{x_0}^{x} dx'\, e^{I(x')}Q(x')$, con $I(x) = \int^x dx'\, P(x')$. Nel nostro caso risulta $I(x) = \frac{1}{2}\ln(2)x^2$ e pertanto

$$\int_{x_0}^{x} dx'\, e^{I(x')}Q(x') = \ln(4)\int_{x_0}^{x} dx' e^{\frac{1}{2}\ln(2)x'^2}x' = 2(e^{\frac{1}{2}\ln(2)x^2} - e^{\frac{1}{2}\ln(2)x_0^2}).$$

La soluzione piu' generale e' allora

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln(2)x^2}(C - 2e^{\frac{1}{2}\ln(2)x_0^2}) + 2.$$

Sciegliendo $x_0 = 2$ ed imponendo la condizione al contorno $y(2) = -1$ troviamo $-1 = \frac{1}{4}C - 2 + 2$ da cui $C = -4$. Ne segue che la soluzione cercata e' $y(x) = -12e^{-\frac{1}{2}\ln(2)x^2} + 2 = -12 \times 2^{-\frac{x^2}{2}} + 2$.

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 02.03.09

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Impagnatiello A	4	4	5	4	2	5	24/30
Barbera D	5	1	5	2,5	0	5	18,5/30
Valguarnera A	3,5	3	5	2	0	2	15,5/30
Puddu M	2,5	5	4	0	0	5	16,5/30
House JN	3,5	1,5	5	1	1	5	17/30
D'Anna D	4	2	4	2,5	3	5	20,5/30
Galeotti G	5	2,5	4	1,5	3	1,5	17,5/30
Barbini P	2,5	1	4	1	0	2,5	11/30
Cervelli F	4	1	5	2	0	1,5	13,5/30
Di Lodovico A	2	4	3,5	0	4	1,5	15/30
De Carolis D	4	1	5	0	0	5	15/30
Iannaci A	3,5	2	5	0	2	2	14,5/30
Beltotto A	3,5	2	5	0	0	4	14,5/30
Morbidoni M	4,5	3	5	1	0	5	18,5/30
Rubino P	1	2	0	4	5	0	12/30
De Marchi F	4	4	2,5	5	3,5	4	23/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci