Esame di Metodi Matematici

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 03 Settembre 2009, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Utilizzando il teorema dei residui si calcoli il seguente integrale

$$I = \int_0^\infty dx \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}$$

Suggerimento: Si osservi che la funzione integranda e' pari.

Problema 2

Sia data la funzione polidroma $f(z) = \sqrt{(z-i)^3}$. Tagliando il piano complesso tra i e $i\infty$ e specificando che per $z = 2i$ a destra del taglio la funzione vale $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$, calcolare il valore della funzione in $z = 0$, $z = -i$ e a sinistra del taglio in $z = 2i$.

Problema 3

Si calcoli l'integrale $I = \int_{\frac{5}{12\pi}}^{1} dx\, \delta(\sin \frac{1}{x}) e^{ix}$.

Problema 4

Sia data la matrice Hermiteana

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & \Delta_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & \Delta_2 \\ \Delta_1 & 0 & -\epsilon_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 & -\epsilon_2 \end{pmatrix}$$

con Δ_1 e Δ_2 costanti reali positive. Calcolare gli autovalori e la base ortonormale degli autovettori.

Problema 5

Sia data in uno spazio vettoriale di dimensione 2 la base di ket ortonormali $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$. Sia poi dato l'operatore lineare A la cui azione sui ket di base e'

$$\begin{aligned} A|a_1\rangle &= \cos\frac{2\pi}{12}|a_1\rangle + i\sin\frac{2\pi}{12}|a_2\rangle, \\ A|a_2\rangle &= i\sin\frac{2\pi}{12}|a_1\rangle + \cos\frac{2\pi}{12}|a_2\rangle. \end{aligned}$$

Calcolare per quali valori di n (intero positivo) e' massima la quantita' $|\langle a_2|A^n|a_1\rangle|$ e il corrispondente valore nel massimo.

Problema 6

Si calcoli la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = -1$ con condizioni al contorno $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 2$.
1) Per quali valori di t la derivata prima si annulla?
2) Nei punti in cui $\dot{x}(t) = 0$ la funzione $x(t)$ e' positiva o negativa?

Soluzione Problema 1

Essendo la funzione integranda pari risulta $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}$. Utilizzando l'identita' $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ possiamo scrivere I come la somma di due contributi. Il contributo contenente e^{ix} puo' essere calcolato chiudendo il cammino nel semipiano superiore mentre quello con e^{-ix} nel semipiano inferiore. Cosi' facendo si trova $I = \frac{2\pi i}{4i}(\mathrm{Res}_i + \mathrm{Res}_{-i})$, dove $\mathrm{Res}_{\pm i}$ e' il residuo della funzione integranda in $\pm i$. Avendo in ambedue i casi un polo doppio avremo $\mathrm{Res}_{\pm i} = \lim_{z\to\pm i} \frac{d}{dz}[\frac{z e^{\pm iz}}{(z\pm i)^2}] = \frac{1}{4e}$ e pertanto $I = \frac{\pi}{4e}$.

Soluzione Problema 2

Risulta $z = 2i = i + e^{i\frac{\pi}{2}+2n\pi i}$. La funzione puo' dunque assumere i valori $f(2i) = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$ oppure $f(2i) = e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{3\pi i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Ne segue che siamo nel ramo dei punti dati da $z = i + \rho e^{i\theta+2\pi i}$. Avremo allora che in $z = 0 = i + e^{-i\frac{\pi}{2}+2\pi i}$ si ha $f(0) = e^{-i\frac{3\pi}{4}} e^{3\pi i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, in $z = -i = i + 2e^{-i\frac{\pi}{2}+2\pi i}$ si ha $f(-i) = 2(1+i)$, ed infine a sinistra del taglio in $z = 2i = i + e^{i\frac{\pi}{2}-2\pi i+2\pi i} = i + e^{i\frac{\pi}{2}}$ si ha $f(2i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$.

Soluzione Problema 3

Risulta $\delta(\sin\frac{1}{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2}\delta(x - \frac{1}{n\pi})$. Nell'intervallo di integrazione $(\frac{5}{12\pi}, 1)$ i soli punti in cui l'argomento della δ si annulla sono quelli con $n = 1$ ed $n = 2$. Pertanto $I = \frac{1}{\pi^2}[\frac{e^{i/\pi}}{1^2} + \frac{e^{i/(2\pi)}}{2^2}]$.

Soluzione Problema 4

E' immediato verificare che il problema e' separabile nelle componenti 1,3 e 2,4. Gli autovalori sono $\lambda_1^{\pm} = \pm\xi_1 = \pm\sqrt{\varepsilon_1^2 + \Delta_1^2}$ e $\lambda_2^{\pm} = \pm\xi_2 = \pm\sqrt{\varepsilon_2^2 + \Delta_2^2}$. I corrispondenti autovettori ortonormali sono dati da

$$\psi_1^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\xi_1}} \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\sqrt{\xi_1 \mp \epsilon_1}} \\ 0 \\ \frac{\pm\xi_1 - \epsilon_1}{\sqrt{\xi_1 \mp \epsilon_1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_2^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\xi_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta_2}{\sqrt{\xi_2 \mp \epsilon_2}} \\ 0 \\ \frac{\pm\xi_2 - \epsilon_2}{\sqrt{\xi_2 \mp \epsilon_2}} \end{pmatrix}$$

Soluzione Problema 5

L'operatore A e' unitario con autovalori $e^{\pm\frac{2\pi i}{12}}$ e autovettori $|\lambda_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle \pm |a_2\rangle)$. Ne segue che $A^n = e^{\frac{2\pi i n}{12}}|\lambda_+\rangle\langle\lambda_+| + e^{\frac{-2\pi i n}{12}}|\lambda_-\rangle\langle\lambda_-|$. Il prodotto scalare richiesto e' quindi dato da $\langle a_2|A^n|a_1\rangle = i\sin\frac{2\pi n}{12}$ il cui modulo e' massimo per $n = 3 + 6m$ con m intero positivo e nel massimo vale 1.

Soluzione Problema 6

La soluzione piu' generale e' $x(t) = A + Be^{-t} - t$ da cui, imponendo le condizione al contorno, $x(t) = 3(1 - e^{-t}) - t$. La derivata prima si annulla solo per $t = \ln 3$ e per questo valore $x(\ln 3) > 0$.

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 03.09.09

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Duva G	2	2.5	5	1	1	2	13.5/30
Salvatori D	3.5	0	3.5	4	2.5	2.5	16/30
Garraffo M	0	0	0	0	1	3	4/30
Barbini P	0	0	0	0	2	0	2/30
De Carolis D	5	0	0	0	0	1	6/30
Fava A	5	0	0	0	0	0	5/30
Tebi S	3	0	2	2	0	1	7/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci