Esame di Complementi di Calcolo

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 11 Febbraio 2008, tempo disponibile 2 ore e mezzo

---

Problema 1

Sia data la funzione $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ con

$$u(x,y) = e^{e^x \cos y} \cos(e^x \sin y), \qquad v(x,y) = e^{e^x \cos y} \sin(e^x \sin y).$$

a) Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann verificare che f e' analitica.
b) Scrivere $f(x,y)$ come funzione della sola variabile $z = x+iy$ (Suggerimento: se la funzione $f(x,y) = g(z)$ quando z si trova sull'asse reale allora $f(x,y) = g(z)$ nell'intero dominio di analiticita').
c) Scrivere $f(x,y)$ nella rappresentazione polare, cioe' $f(x,y) = \rho(x,y)e^{i\phi(x,y)}$.

Problema 2

Sviluppare in serie di Laurent la funzione $f(z) = 1/(z+1+i)$ intorno al punto $z_0 = 2+2i$ nelle corone $0 < |z-z_0| < |3+3i|$ e $|3+3i| < |z-z_0| < \infty$.

Problema 3

Sia k una costante reale positiva. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin(kx)}{(x-i\pi)^2}$$

Problema 4

Calcolare la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 1/(k^2+\lambda^2)$ con λ reale, utilizzando l'equazione di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x |f(x)|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2, \qquad \text{con} \qquad f_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} e^{-ikx} f(x)$$

(Suggerimento: sciegliere $f(x) = e^{-\lambda x}$)

Problema 5

Sia data in uno spazio vettoriale di dimensione 3 la base non ortonormale $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|x_3\rangle$, con i seguenti prodotti scalari

$$\begin{array}{lll} \langle x_1|x_1\rangle = 3, & \langle x_1|x_2\rangle = 1+i, & \langle x_1|x_3\rangle = 1 \\ \langle x_2|x_2\rangle = 2, & \langle x_2|x_3\rangle = -i, & \\ \langle x_3|x_3\rangle = 1 & & \end{array}$$

Utilizzare la procedura di Gram-Schimdt per generare una base ortogonale

---

Problema 6

Calcolare e^{iA} con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^{i} & 0 \\ e^{-i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e dimostrare che e^{iA} e' una matrice unitaria (Suggerimento: Scrivere A nella base dei suoi autovettori)

Soluzione Problema 1

a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^{e^x \cos y}\left[e^x \cos y \cos(e^x \sin y) - e^x \sin y \sin(e^x \sin y)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{e^x \cos y}\left[e^x \sin y \cos(e^x \sin y) + e^x \cos y \sin(e^x \sin y)\right]$$

b) $f(z) = e^{e^z}$
c) $\rho(x, y) = e^{e^x \cos y}$, $\phi(x, y) = e^x \sin y$

Soluzione Problema 2

Nella corona $0 < |z - z_0| < |3 + 3i|$ lo sviluppo di Laurent coincide con quello di Taylor e si ha

$$f(z) = \frac{1}{3+3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\left(\frac{z - z_0}{3+3i}\right)^n$$

mentre nella corona $|3 + 3i| < |z - z_0| < \infty$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\left(\frac{3+3i}{z - z_0}\right)^n$$

Soluzione Problema 3

Poiche' i poli sono nel semipiano superiore e k e' positivo risulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\sin(kx)}{(x - i\pi)^2} = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \frac{e^{ikz}}{(z - i\pi)^2} = i\pi k e^{-\pi k}$$

dove il secondo integrale e' lungo una curva chiusa che circonda il polo in $i\pi$.

Soluzione Problema 4

Avremo

$$f_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} e^{-ikx - \lambda x} = \frac{2}{2\pi}\frac{(-)^k}{ik + \lambda}\sinh \lambda\pi$$

e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x e^{-2\lambda x} = \frac{\sinh 2\lambda\pi}{\lambda} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sinh^2 \lambda\pi}{k^2 + \lambda^2} \qquad \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{\lambda}\frac{\cosh \lambda\pi}{\sinh \lambda\pi}$$

Soluzione Problema 5

$|e_1\rangle = |x_1\rangle$, $|e_2\rangle = |x_2\rangle - \frac{1+i}{3}|x_1\rangle$, $|e_3\rangle = |x_3\rangle - \frac{5-3i}{12}|x_1\rangle + \frac{1+2i}{4}|x_2\rangle$

Soluzione Problema 6

La matrice A ha autovalore 1 con autovettore $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, autovalore -1 con autovettore $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e autovalore 2 con autovettore $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ne segue che

$$e^{iA} = e^i \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^\dagger + e^{-i}\boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_2^\dagger + e^{2i}\boldsymbol{v}_3 \boldsymbol{v}_3^\dagger = \begin{pmatrix} \cos 1 & ie^i \sin 1 & 0 \\ ie^{-i}\sin 1 & \cos 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2i} \end{pmatrix}$$

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Galeotti G	0	0	0	1	3	1	5/30
Giacani V	4	2	5	0	4	0	15/30
Cervelli F	3	0	1	0	3	1	8/30
Iannacci A	3	1	0	0	0	4	8/30
Caputo F	3	5	4	5	4	4	25/30
Guarnieri L	3	0	0	0	2	3	8/30

Il docente
Gianluca Stefanucci