# Esame di Complementi di Calcolo

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

*Prova scritta del 14 Luglio 2010, tempo disponibile 3 ore*

---

**Problema 1**

Calcolare tutte le radici dell'equazione: $\log(z^2+2z) = \log(\sqrt{2}) + 3i\pi/4$.

---

**Problema 2**

Sia data la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$. Calcolare il residuo di $f(z)$ nel punto $z_n = \frac{1}{n\pi}$. Utilizzare il risultato per calcolare $\oint_\gamma \frac{dz}{2\pi i} f(z)$ dove $\gamma$ e' un cerchio di centro $(\frac{3}{4\pi}, 0)$ e raggio infinitesimamente maggiore di $\frac{1}{4\pi}$.

---

**Problema 3**

Si calcoli il seguente integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dxdy\, x^2 y^2\, \delta(x^2+y^2-1)$$

Suggerimento: Si passi alle coordinate polari $x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$.

---

**Problema 4**

Siano dati due kets $|e_1\rangle$ ed $|x_2\rangle$ normalizzati ad 1, quindi $\langle e_1|e_1\rangle = \langle x_2|x_2\rangle = 1$, e aventi prodotto scalare $\langle e_1|x_2\rangle = z$ con $z$ numero complesso. Costruire il ket $|e_2\rangle$ normalizzato ad 1 ed ortogonale ad $|e_1\rangle$. Il ket $|e_2\rangle$ esiste sempre?

---

**Problema 5**

Sia data la matrice $A = e^{i\phi}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ con $\phi \in [0, 2\pi)$. Per quali valori di $\phi$ la matrice $A$ e' Hemitiana? Si calcoli $\frac{1}{\cos(A)}$ utilizzando la formula $f(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz\, \frac{f(z)}{z-A}$. Per quali valori di $\phi$ la matrice $\frac{1}{\cos(A)}$ e' Hemitiana?

---

**Problema 6**

Sia data l'equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, a coefficienti non costanti

$$\ddot{y}(x) - \left(\frac{6}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{4}\right) y(x) = 0.$$

1) Per quale valore della costante reale $q$ la funzione $y_1(x) = \frac{e^{x/q}}{x^2}$ e' soluzione?
2) La seconda soluzione dell'omogenea e' data da $y_2(x) = y_1(x)\int_0^x dt \frac{1}{y_1^2(t)}$. Sapreste dire quanto vale

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int_0^\infty dt \frac{1}{y_1^2(t)} \quad ?$$

**Soluzione Problema 1**

Risulta $\log(\sqrt{2})+3i\pi/4 = \log(\sqrt{2}e^{3i\pi/4})$ e dunque $z^2+2z = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} = -1+i$, da cui le due soluzioni $z_1 = -1+e^{i\pi/4}$ e $z_2 = -1 + e^{i\pi+i\pi/4}$

**Soluzione Problema 2**

Risulta $z = z - z_0 + z_0 = \frac{1}{n\pi} + (z - z_0) = \frac{1+n\pi(z-z_0)}{n\pi}$. Quindi $\sin(\frac{1}{z}) = \sin(\frac{n\pi}{1+n\pi(z-z_0)}) = (-)^{n+1}(n\pi)^2(z - z_0) + \mathcal{O}[(z - z_0)^2]$. Pertanto il residuo richiesto e' $R = \frac{(-)^{n+1}}{(n\pi)^2}$. All'interno di $\gamma$ abbiamo solo due poli corrispondenti a $n = 1$ ed $n = 2$. Quindi l'integrale richiesto e' $\frac{1}{\pi^2}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4\pi^2}$.

**Soluzione Problema 3**

In coordinate polari l'integrale diventa $I = \int_0^\infty dR\, R^5\delta(R^2 - 1) \int_0^{2\pi} d\phi(\cos\phi \sin\phi)^2 = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 2\phi = \frac{\pi}{8}$

**Soluzione Problema 4**

Il ket ortogonale a $|e_1\rangle$ e' $|x_2\rangle - z|e_1\rangle$ e pertanto il ket richiesto e'

$$|e_2\rangle = \frac{|x_2\rangle - z|e_1\rangle}{\sqrt{(\langle x_2| - z^*\langle e_1|)(|x_2\rangle - z|e_1\rangle)}} = \frac{|x_2\rangle - z|e_1\rangle}{\sqrt{1 - |z|^2}}.$$

Il ket $|e_2\rangle$ esiste solo se $|z| < 1$. Infatti per $|z| > 1$ la norma di $|x_2\rangle - z|e_1\rangle$ e' negativa.

**Soluzione Problema 5**

La matrice $A$ e' Hermitiana solo per $e^{i\phi}$ reale e dunque solo per $\phi = 0, \pi$. Per il calcolo di $\frac{1}{\cos A}$ dobbiamo prima determinare il risolvente:

$$\frac{1}{z - A} = \frac{1}{z(z - 2e^{i\phi})} \begin{pmatrix} z - e^{i\phi} & ie^{i\phi} \\ -ie^{i\phi} & z - e^{i\phi} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\frac{1}{\cos A} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz \frac{1}{\cos z}\frac{1}{z(z - 2e^{i\phi})} \begin{pmatrix} z - e^{i\phi} & ie^{i\phi} \\ -ie^{i\phi} & z - e^{i\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cos(2e^{i\phi})} \begin{pmatrix} 1 + \cos(2e^{i\phi}) & i(1 - \cos(2e^{i\phi})) \\ -i(1 - \cos(2e^{i\phi})) & 1 + \cos(2e^{i\phi}) \end{pmatrix}.$$

La matrice $\frac{1}{\cos A}$ e' Hermitiana quando $\cos(2e^{i\phi})$ e' reale ossia per $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

**Soluzione Problema 6**

1) Risulta $\ddot{y}_1(x) = \left(\frac{6}{x^2} - \frac{4}{qx} + \frac{1}{q^2}\right)\frac{e^{x/q}}{x^2}$ e quindi $y_1$ e' soluzione per $q = 2$.

2) Sostituendo la soluzione nell'integrale avremo

$$\int_0^\infty dt \frac{1}{y_1^2(t)} = \int_0^\infty dt\; t^4 e^{-t} = \Gamma(5) = 4!$$

# PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 14.07.10

## VALUTAZIONE

| | esercizio 1 | esercizio 2 | esercizio 3 | esercizio 4 | esercizio 5 | esercizio 6 | voto |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| De Carolis D | 0 | 0 | 4.5 | 1 | 3 | 5 | 13.5/30 |
| Campaniello V | 4.5 | 0 | 2.5 | 0 | 3 | 1 | 11/30 |
| Sturniolo A | 4.5 | 5 | 2.5 | 2.5 | 3.5 | 5 | 23/30 |
| Caponi G | 0.5 | 0 | 0.5 | 1 | 0 | 0 | 2/30 |
| La Regina B | 4.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.5 | 8/30 |
| Cherubini V | 1 | 1 | 2.5 | 0 | 0 | 3 | 7.5/30 |
| Barbini P | 4.5 | 0.5 | 1 | 1 | 0 | 5 | 12/30 |
| Pinchetti V | 1 | 0.5 | 1.5 | 4 | 0 | 2 | 9/30 |
| Fava A | 3.5 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 3.5 | 7.5/30 |

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci