Esame di Metodi Matematici

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 16 Febbraio 2010, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Sia C un cerchio sul piano complesso di centro nell'origine e raggio 2π. Calcolare l'integrale curvilineo percorso in senso antiorario

$$I = \oint_C dz \frac{e^{i\beta z}}{\cos(z)}$$

dove β e' una costante reale.

Problema 2

Sia $f_L(s) = s \ln s$ la trasformata di Laplace di una funzione $f(x)$ con ascissa di convergenza $\alpha > 0$. Determinare la funzione $f(x)$ per $x > 0$ (Nota che $f_L(s)$ ha un punto di diramazione nell'origine: fare un taglio da $-\infty$ a 0).

Problema 3

Sia data la funzione periodica $f(x) = \frac{1}{e^{ix}+2i}$ di periodo 2π. Determinare i coefficienti della serie di Fourier $f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x)$.

Problema 4

Sia $|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle$ una base ortonormale ed A l'operatore cosi' definito

$$A = |e_1\rangle\langle e_2| - |e_2\rangle\langle e_1| + |e_3\rangle\langle e_3|$$

(1) Calcolare gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e gli autokets normalizzati $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ di A
(2) Dato un generico ket $|\varphi\rangle = a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + a_3|e_3\rangle$ esprimere il risultato dell'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \sin(\frac{\pi}{2}x) \sum_{n=1}^{3} |\langle\varphi|\psi_n\rangle|^2 \, \delta(x - |\lambda_n|)$$

in funzione di a_1, a_2, a_3.

Problema 5

Sia $|\psi\rangle$ un ket normalizzato ed A un operatore lineare tale che
(a) $A|\psi\rangle = |0\rangle$ dove $|0\rangle$ e' il ket nullo
(b) $AA^\dagger - A^\dagger A = 1$.
Calcolare i seguenti prodotti scalari:

$$(1) \quad \langle\psi|A^\dagger|\psi\rangle, \qquad (2) \quad \langle\psi|AA^\dagger|\psi\rangle, \qquad (3) \quad \langle\psi|(AA^\dagger)^2|\psi\rangle, \qquad (4) \quad \langle\psi|A^2(A^\dagger)^2|\psi\rangle,$$

Problema 6

Data l'equazione differenziale $y''(x) - (\frac{3}{4x^2} + 4x^2)y(x) = 0$
(1) Determinare per quale valore della costante reale α la funzione $y_1(x) = x^\alpha e^{-x^2}$ e' soluzione
(2) A partire da y_1 calcolare l'altra soluzione independente

Soluzione Problema 1

La funzione integranda ha poli semplici in $z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ con n intero. Il residuo del generico polo e'

$$R_n = \lim_{z\to z_n} \frac{(z-z_n)e^{i\beta z}}{\cos(z)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon e^{i\beta(\frac{\pi}{2}+n\pi+\epsilon)}}{\cos[\frac{\pi}{2}+n\pi+\epsilon]} = (-)^{n+1} e^{i\beta(\frac{\pi}{2}+n\pi)}.$$

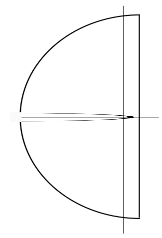
Nel cerchio considerato sono contenuti solo i poli con $n = -2, -1, 0, 1$ e pertanto

$$I = -2\pi i(e^{-i\beta\frac{3\pi}{2}} - e^{-i\beta\frac{\pi}{2}} + e^{i\beta\frac{\pi}{2}} - e^{i\beta\frac{3\pi}{2}}) = 4\pi[\sin(\beta\frac{\pi}{2}) - \sin(\beta\frac{3\pi}{2})]$$

Soluzione Problema 2

Dalla teoria abbiamo che per $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|} ds\, e^{sx} f_L(s)$ dove l'integrale e' lungo una retta nel semipiano $\mathrm{Re}[s] > 0$ parallela all'asse verticale. Per $x > 0$ possiamo considerare la curva chiusa γ in figura. Poiche' l'integrale curvilineo su γ e' nullo risulta

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0} ds\, e^{sx}[f_+(s) - f_-(s)]$$



dove $f_\pm(s)$ e' il valore della funzione sopra/sotto l'asse reale. Nel nostro caso $f_\pm(s) = f(\rho e^{\pm i\pi}) = -\rho(\ln\rho \pm i\pi)$ e dunque $f_+(s) - f_-(s) = -2\pi i\rho$. Ne segue che $f(x) = \int_0^\infty d\rho\, \rho e^{-\rho x} = 1/x^2$.

Soluzione Problema 3

Ponendo $z = e^{ix}$ risulta $f_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz z^{-k-1}/(z+2i)$ dove γ e' un cercio di raggio 1 con centro nell'origine. Per $k \le -1$ la funzione integranda e' analitica dentro γ e quindi $f_k = 0$. Per $k > -1$ la funzione ha un polo di ordine $k+1$ in zero. Pertanto $f_k = \lim_{z\to 0}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}[1/(z+2i)] = (-)^k(1/2i)^{k+1}$.

Soluzione Problema 4

(1) Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ e $\lambda_3 = 1$ ed i corrispondenti kets normalizzati sono $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + i|e_2\rangle)$, $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - i|e_2\rangle)$, $|\psi_3\rangle = |e_3\rangle$.
(2) Essendo $|\lambda_n| = 1$ per tutti gli n l'integrale su x fornisce $I = \sum_{n=1}^3 |\langle\varphi|\psi_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^3 \langle\varphi|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle = |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2$.

Soluzione Problema 5

Dalla proprieta' (a) segue che $\langle\psi|A^\dagger = \langle 0|$ e dunque $\langle\psi|A^\dagger|\psi\rangle = 0$. Dalla proprieta' (b) segue che $AA^\dagger|\psi\rangle = A^\dagger A|\psi\rangle + |\psi\rangle$ e usando di nuovo la proprieta' (a) $AA^\dagger|\psi\rangle = |\psi\rangle$ e dunque $\langle\psi|AA^\dagger|\psi\rangle = 1$. Dall'identita' $AA^\dagger|\psi\rangle = |\psi\rangle$ segue anche che $(AA^\dagger)^2|\psi\rangle = |\psi\rangle$ e dunque $\langle\psi|(AA^\dagger)^2|\psi\rangle = 1$. Infine $A^2(A^\dagger)^2|\psi\rangle = AAA^\dagger A^\dagger|\psi\rangle = A(A^\dagger A+1)A^\dagger|\psi\rangle = [(AA^\dagger)^2 + AA^\dagger]|\psi\rangle = 2|\psi\rangle$ e quindi $\langle\psi|A^2(A^\dagger)^2|\psi\rangle = 2$.

Soluzione Problema 6

(1) La derivata seconda di y_1 fornisce $y_1''(x) = [\frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} - (4\alpha+2) + 4x^2]y_1(x)$ e pertanto y_1 e' soluzione per $\alpha = -1/2$.
(2) L'altra soluzione e' fornita da $y_2(x) = y_1(x)\int^x dx'/y_1^2(x') = y_1(x)\int^x dx' x' e^{2x'^2} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}e^{x^2}$.

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 16.02.10

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Di Carlo Rosi D	2.5	1.5	0	4.5	5	5	18.5/30
Barbini P	1	0	0	3	2	0	6/30
Pinchetti V	1	0	1	1	0	0	3/30
Duva G	4.5	4.5	0	4.5	2	0	15.5/30
Battistoni S	2.5	0	5	3	4	1.5	16/30
Benedetto D	5	2	4	1	5	0	17/30
Neri A	2.5	0	4.5	0	2	5	14 /30
La Regina B	1	0	0	0	3.5	1.5	6/30
Cherubini V	1	0	3.5	0	0	0	4.5/30
Fava A	0.5	0	0.5	3	1	0.5	5.5/30
De Carolis D	0.5	0	0.5	1	0.5	1.5	4/30
Papale D	2.5	0	0	0	0	5	7.5/30
Garraffo M	0	0	2.5	0	1	5	8.5/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci