Esame di Metodi Matematici

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 16 Giugno 2010, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Sia data la funzione analitica $f(z) = \sin(e^z)$. Posto $z = x + iy$ si scomponga $f(z)$ in una parte reale ed una immaginaria: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Problema 2

Utilizzando il teorema dei residui si calcoli

$$I = \int_0^\infty dx \frac{x^{1/3}}{x^2 + 1}.$$

Problema 3

Sia data la funzione $f(x) = x^n \delta(e^{x^2} - e)$ con n intero. Si calcoli la sua trasformata di Fourier $\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ipx} f(x)$. Per quali valori di n la funzione $\tilde{f}(p)$ e' reale? Esistono valori di n per cui $\tilde{f}(p)$ ha sia una parte reale che una immaginaria?

Problema 4

Sia $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$, $|e_3\rangle$ una base ortonormale. L'azione dell'operatore A sui kets della base e'

$$A|e_1\rangle = \sqrt{2}|e_2\rangle, \quad A|e_2\rangle = \sqrt{2}|e_3\rangle, \quad A|e_3\rangle = |0\rangle$$

con $|0\rangle$ il ket nullo. Determinare gli autovalori ed autovettori normalizzati dell'operatore $B = \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$

Problema 5

Siano dati due operatori A e B tali che $[A, B] = 1$. Esprimere i commutatori $[A, B^2]$, $[A, B^3]$ e $[A, B^4]$ solo in termini di B (Si ricordi che $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$). Considerando i risultati ottenuti quanto vi aspettate che faccia $[A, B^n]$ con n intero positivo? Dimostrare la vostra intuizione (un possibile modo e' quello di utilizzare l'induzione). Sfruttare poi il risultato per calcolare $[A, e^B]$.

Problema 6

Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{d^4}{dt^4} y(t) + 2\frac{d^3}{dt^3} y(t) + \frac{d^2}{dt^2} y = 0,$$

con condizioni iniziali

$$y(0) = 3, \quad \frac{d}{dt} y(0) = -2, \quad \frac{d^2}{dt^2} y(0) = 1, \quad \frac{d^3}{dt^3} y(0) = 0.$$

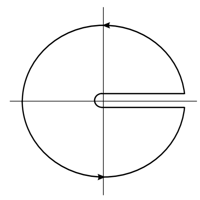
Soluzione Problema 1

Risulta $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Pertanto $e^{\pm ie^z} = e^{\pm ie^x \cos y \mp e^x \sin y} = e^{\mp e^x \sin y}[\cos(e^x \cos y) \pm i \sin(e^x \cos y)]$. Essendo $\sin(e^z) = \frac{1}{2i}(e^{ie^z} - e^{-ie^z})$ avremo

$$u(x, y) = \sin(e^x \cos y) \cosh(e^x \sin y), \qquad v(x, y) = \cos(e^x \cos y) \sinh(e^x \sin y).$$

Soluzione Problema 2

Si consideri la curva chiusa γ in figura. Si ha



$$\oint_\gamma dz \frac{z^{1/3}}{z^2 + 1} = 2\pi i \left(\frac{e^{\pi i/6}}{2i} - \frac{e^{3\pi i/6}}{2i} \right) = (1 - e^{2\pi i/3}) I$$

e quindi moltiplicando ambo i membri per $(1 - e^{-2\pi i/3})$ troviamo $I = \frac{\pi \cos(\pi/6)}{1-\cos(\pi/3)}$.

Soluzione Problema 3

Essendo $\delta(e^{x^2} - e) = \frac{1}{2e}[\delta(x + 1) + \delta(x - 1)]$ risulta $\tilde{f}(p) = \frac{1}{2e}[e^{ip} + (-)^n e^{-ip}]$. Pertanto $\tilde{f}(p)$ e' reale se n e' pari. Viceversa, se n e' dispari $\tilde{f}(p)$ e' puramente immaginaria e quindi non esiste alcun valore di n per cui $\tilde{f}(p)$ ha sia una parte reale che una immaginaria.

Soluzione Problema 4

La rappresentazione di B nella base data e' una matrice di elementi $B_{ij} = \langle e_i|B|e_j\rangle$ cosi fatta

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = 1$ con autoket $|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle$, $\lambda_2 = 0$ con autoket $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle$, e $\lambda_3 = -1$ con autoket $|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}|e_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle + \frac{1}{2}|e_3\rangle$.

Soluzione Problema 5

Utilizzando l'identita' suggerita nel testo si trova $[A, B^2] = 2B$, $[A, B^3] = 3B^2$, $[A, B^4] = 4B^3$. Ci aspettiamo dunque che $[A, B^n] = nB^{n-1}$. Per dimostrarlo assumiamo che sia vero per $n - 1$ e dimostriamolo per n. Risulta $[A, B^n] = [A, BB^{n-1}] = [A, B]B^{n-1} + B[A, B^{n-1}] = B^{n-1} + B(n - 1)B^{n-2} = nB^{n-1}$. Con questa identita' e' facile calcolare l'ultimo commutatore richiesto dal problema

$$[A, e^B] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[A, B^n] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} B^{n-1} = e^B.$$

Soluzione Problema 6

Il polinomio caratteristico e' $P(a) = a^2(a+1)^2$ e peranto la soluzione piu' generale e' $y(t) = A + Bt + Ce^{-t} + Dte^{-t}$. Utilizzando le condizioni iniziali si trova $A = 0$, $B = 0$, $C = 3$ e $D = 1$.

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 16.06.10

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Speroni A	5	0	2	2	2.5	5	16.5/30
Rondini E	0	0	0	0	2.5	0	2.5/30
Calabro' E	5	0	5	5	2.5	3	20.5/30
Papale D	0	0	5	4	3.5	5	17.5/30
Battistoni S	4	0	5	5	4	3	21/30
Giuliano G	0	3.5	1	0	1	5	10.5/30
Benedetto D	1	0	0	0	2.5	5	8.5/30
Campaniello V	4.5	3.5	0	1	2.5	3	14.5/30
Figliolini N	0	1	0	0	0.5	5	6.5/30
Cherubini V	0	0	1	0	0	5	6/30
Barbini P	2	0	0	1	2.5	0	5.5/30
De Carolis D	0	0	5	1	3.5	5	14.5/30
Duva G	5	0	5	5	5	3	23/30
La Regina B	0	3.5	0	3	2.5	5	14/30
Fava A	2	3	0	4	0.5	3	12.5/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci