Esame di Complementi di Calcolo

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 16 Novembre 2010, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

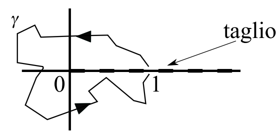
Sia data la funzione $u_\alpha(x,y) = e^{\alpha x}\,[x\cos y - y\sin y]$.
1) Per quale valore di α la funzione $u_\alpha(x,y)$ e' armonica?
2) Per tale valore di α si calcoli la funzione di variabile complessa $f(z)$ di cui $u_\alpha(x,y)$ e' la parte reale e tale che $f(0) = -1+2i$ (esprimere $f(z)$ in termini della sola variabile z).

Problema 2

Data la costante reale $a > 1$ si calcoli l'integrale $I = \oint_\gamma \frac{dz}{z}\frac{z^2+1}{z^2+2iaz-1}$ dove la curva γ è un cerchio di raggio 1 centrato nell'origine.

Problema 3

Si consideri la curva aperta γ illustrata in figura. Si calcoli $I = \int_\gamma dz(z-1)\ln z$ dove la funzione logaritmo ha il taglio da 0 a ∞ come illustrato in figura ed e' reale sopra il taglio.



Problema 4

Sia data la matrice $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Per quale valore di α la matrice A e' unitaria? Per tale valore di α calcolare la traccia ed il determinante di $B = (A^\dagger)^2 A^3$.

Problema 5

In uno spazio unitario di dimensione 4 sia data la base *non* ortonormale $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|x_3\rangle$, $|x_4\rangle$. Il prodotto scalare tra gli elementi della base è assegnato essere $\langle x_i|x_j\rangle = S_{ij}$ dove S_{ij} e' l'elemento (i,j) della matrice

$$S = \begin{pmatrix} 3 & e^{i} & 0 & e^{-i} \\ e^{-i} & 3 & e^{i} & 0 \\ 0 & e^{-i} & 3 & e^{i} \\ e^{i} & 0 & e^{-i} & 3 \end{pmatrix}.$$

1) L'operatore $A = \sum_{i=1}^{4}|x_i\rangle\langle x_i|$ e' Hermitiano?
2) Calcolare $\langle a|A|a\rangle$ con $|a\rangle = |x_1\rangle + |x_2\rangle + |x_3\rangle + |x_4\rangle$.

Problema 6

Sia data l'equazione differenziale omogenea, lineare a coefficienti costanti

$$\frac{d^3y}{dt^3}(t) - 2(i-1)\frac{d^2y}{dt^2}(t) + (i-1)^2\frac{dy}{dt}(t) = 0.$$

1) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dt}(0) = -1$, e $\frac{d^2y}{dt^2}(0) = 2$.
2) Calcolare $\lim_{t\to\infty}|y(t)|$.

Soluzione Problema 1

Risulta $\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = e^{\alpha x}\left[\alpha^2(x\cos y - y\sin y) + 2\alpha\cos y\right]$ e $\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} = e^{\alpha x}\left[-x\cos y - 2\cos y + y\sin y\right]$ e pertanto $u_\alpha(x,y)$ è armonica per $\alpha = 1$. Per calcolare la parte immaginaria di f usiamo $v(x,y) = C - \int_0^x dx' \frac{\partial u_1}{\partial y}(x',0) + \int_0^y dy' \frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y')$. Risulta $\frac{\partial u_1}{\partial y}(x',0) = e^{x'}\left[-x'\sin 0 - \sin 0 - 0\cos 0\right] = 0$ mentre $\frac{\partial u_1}{\partial x}(x,y') = e^x\left[x\cos y' - y'\sin y' + \cos y'\right]$. Pertanto $v(x,y) = C + e^x\left[y\cos y + x\sin y\right]$. Per determinare la costante C usiamo che $f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = iC = -1 + 2i$. In conclusione

$$f(z) = e^x\left[x\cos y - y\sin y\right] + ie^x\left[y\cos y + x\sin y\right] - 1 + 2i.$$

Per esprimere $f(z)$ in termini della sola variabile z osserviamo che $f(x) = u(x,0) + iv(x,0) = e^x x - 1 + 2i$ e quindi $f(z) = ze^z - 1 + 2i$.

Soluzione Problema 2

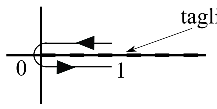
Risulta $z^2 + 2iaz - 1 = (z - z_+)(z - z_-)$ con $z_\pm = -ia \pm i\sqrt{a^2 - 1}$. Essendo $a > 1$ il punto z_+ è dentro γ mentre z_- è fuori. Utilizzando il teorema dei residui

$$I = 2\pi i\left(R_0 + R_{z_+}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{z_+ z_-} + \frac{z_+^2 + 1}{z_+(z_+ - z_-)}\right).$$

È immediato verificare che $z_+ z_- = -1$ e pertanto $I = 0$.

Soluzione Problema 3

Deformando il contorno come illustrato qui accanto avremo



$$I = \int_1^0 dx(x-1)\ln x + \int_0^1 dx(x-1)(\ln x + 2\pi i) = 2\pi i\int_0^1 dx(x-1) = -\pi i.$$

Soluzione Problema 4

Imponendo l'ortogonalita' tra i vettori riga si trova $\alpha = -i$ e per tale valore entrambe i vettori riga hanno norma 1, quindi A è unitaria per $\alpha = -i$. Essendo $A^\dagger A = 1$ risulta $B = A$ e dunque $\mathrm{Tr}[B] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$ e $\mathrm{Det}[B] = -i$.

Soluzione Problema 5

1) L'operatore A e' Hermitiano indipendentemente dalla matrice S.
2) Risulta $\langle a|A|a\rangle = \sum_{i=1}^4 \langle a|x_i\rangle\langle x_i|a\rangle$. Ora $\langle x_i|a\rangle = \sum_{j=1}^4 \langle x_i|x_j\rangle = \sum_{j=1}^4 S_{ij} = 3 + 2\cos(1)$ è lo stesso per tutte le i e quindi $\langle a|A|a\rangle = 4(3 + 2\cos(1))^2$.

Soluzione Problema 6

1) Dal polinomio caratteristico si trova che la soluzione piu' generale è $y(t) = A + (B + Ct)e^{(i-1)t}$. Imponendo le condizioni iniziali troviamo $y(0) = A + B = 1$, $\frac{dy}{dt}(0) = B(i-1) + C = -1$ e $\frac{d^2y}{dt^2}(0) = B(i-1)^2 + 2C(i-1) = 2$, da cui si ricava $A = 0$, $B = 1$ e $C = -i$, e quindi la soluzione richiesta è $y(t) = (1 - it)e^{(i-1)t}$.
2) Risulta $|y(t)| = \sqrt{1 + t^2}e^{-t}$ e quindi $\lim_{t\to\infty}|y(t)| = 0$.

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 16.11.10

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Caponi G	2	3	1	1	3	2	12/30
Fabbri Y	3.5	1	1.5	0.5	4	2	12.5/30
La Regina B	5	4.5	1	1	3	2	16.5/30
Cherubini V	2	1	1	3	5	5	17/30
Giuliano G	5	0	1	0.5	3	2	11.5/30
Fava A	0	0	1	0.5	4	1.5	7/30
Basti M	2.5	0.5	1	0.5	3	0	7.5/30
Farre F	2	1	1	0	4	1.5	9.5/30
Pinchetti V	4	5	5	5	4.5	3	26.5/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci