Esame di Metodi Matematici

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 20 Gennaio 2010, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Sia data la funzione di variabile complessa $f(z) = z \cos z$, con $z = x + iy$.
1) Si calcoli la parte reale $u(x,y)$ e la parte immaginaria $v(x,y)$,
2) Si calcoli $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)$ e $\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,y)$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}v(x,y)$ e verificare che le condizioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte,
3) Data la funzione $g_\alpha(x,y) = u(x,y) + \alpha v(x,y)$, oltre ad $\alpha = i$ esistono altri valori della costante α per cui $g_\alpha(x,y)$ e' analitica? (Motivare la risposta).

Problema 2

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\sin(z^2 - 2z + 1)}{(z-1)(z^2 - (1 + \frac{3}{2}i)z + \frac{3}{2}i)}$$

1) Determinare i domini per sviluppare $f(z)$ in serie di Laurent attorno a $z = 1$,
2) Per ciasun dominio sviluppare $f(z)$ in serie di Laurent

Problema 3

In uno spazio vettoriale di dimensione 4 sia $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle\}$ una base ortonormale ed A un operatore lineare la cui azione sui ket di base e' $A|\psi_n\rangle = i\sum_{m=1}^{n}(m-1)|\psi_m\rangle$, con $n = 1,2,3,4$. Si calcoli

$$C = \langle\psi_4|A\left(|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_3\rangle\langle\psi_3| + |\psi_4\rangle\langle\psi_4|\right)A|\psi_4\rangle.$$

Problema 4

Si calcoli la seguente parte principale: $I = P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

Problema 5

Sia data la funzione periodica $f(x)$ di periodo 2π che nell'intervallo $x \in (-\pi, \pi)$ vale $f(x) = \delta(x^2 - 6x + 5)$, con δ la funzione delta di Dirac. Calcolare i coefficienti $f_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{-ikx} f(x)$ dello sviluppo in serie di Fourier.

Problema 6

Risolvere l'equazione differenziale $\ddot{y}(t) - \frac{2}{t^2}y(t) = t$ con condizioni al contorno $y(2) = 3$ e $y(4) = \frac{5}{2}$ (Suggerimento: si osservi che $y_1(t) = t^2$ e' una soluzione dell'omogenea).

Soluzione Problema 1

1) $u(x,y) = x\cos x\cosh y + y\sin x\sinh y$, $v(x,y) = -x\sin x\sinh y + y\cos x\cosh y$,
2) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = -(2\sin x + x\cos x)\cosh y - y\sin x\sinh y$,
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,y) = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}v(x,y) = (-2\cos x + x\sin x)\sinh y - y\cos x\cosh y$,
3) No, in quanto data la parte reale u di una funzione analitica la parte immaginaria e' definita a meno di una costante additiva.

Soluzione Problema 2

1) Scrivendo il denominatore in termini delle radici si ha che $f(z) = \frac{\sin[(z-1)^2]}{(z-1)^2(z-\frac{3}{2}i)}$. La funzione ha pertanto un polo semplice in $z = 3i/2$ e quindi due domini per lo sviluppo. Il primo e' il cerchio $0 \le |z-1| < \sqrt{13}/2$ ed il secondo la corona circolare $\sqrt{13}/2 < |z-1| < \infty$.
2) Nella cerchio $0 \le |z-1| < \sqrt{13}/2$ si ha lo sviluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2(2k+1)-2} \times (-)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{(\frac{3}{2}i-1)^{n+1}} = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(-)^{k+1}}{(2k+1)!(\frac{3}{2}i-1)^{n+1}}(z-1)^{4k+n}$$

mentre nella corona $\sqrt{13}/2 < |z-1| < \infty$ si ha lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2(2k+1)-2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2}i-1)^n}{(z-1)^{n+1}} = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(-)^k(\frac{3}{2}i-1)^n}{(2k+1)!}(z-1)^{4k-n-1}$$

Soluzione Problema 3

Poiche' $A|\psi_1\rangle$ e' il vettore nullo possiamo aggiungere $|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ nella parentesi tonda e formare cosi' l'operatore identita'. Avremo allora

$$C = \langle\psi_4|A^2|\psi_4\rangle = \langle\psi_4|A\, i\sum_{n=1}^{4}(n-1)|\psi_n\rangle = -\langle\psi_4|\sum_{n=1}^{4}(n-1)\sum_{m=1}^{n}(m-1)|\psi_m\rangle = -9$$

Soluzione Problema 4

Risulta $\cos^2 x = \frac{1}{4}[e^{2ix}+2+e^{-2ix}]$ e pertanto I e' dato dalla somma di tre contributi. Il contributo senza esponenziali e' nullo in quanto $P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-x_0} = 0$. Avremo allora $I = \frac{1}{2}P\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}+i\eta} + i\pi\cos(\pi/2)$. Il secondo termine e' nullo. Il primo termine puo' essere calcolato col teorema dei residui. Poiche' il polo giace nel semipiano inferiore avremo $I = \frac{1}{2}P\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{\cos 2x}{x-\frac{\pi}{4}+i\eta} = \frac{1}{2}(-2\pi i)\frac{1}{2}e^{-2i\pi/4} = -\pi/2$.

Soluzione Problema 5

La funzione $\delta(x^2-6x+5) = \frac{1}{4}[\delta(x-1)+\delta(x-5)]$ e pertanto nell'intervallo $x \in (-\pi,\pi)$ risulta $f(x) = \frac{1}{4}\delta(x-1)$. Ne segue che $f_k = \frac{1}{8\pi}e^{-ik}$.

Soluzione Problema 6

Le due soluzioni dell'omogenea sono $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = 1/t$. Il wronskiano e' allora $w = \dot{y}_1y_2 - y_1\dot{y}_2 = 3$ da cui si ricava la soluzione particolare $y_p(t) = t^3/4$. La soluzione piu' generale e' allora $y(t) = At^2 + B/t + t^3/4$ e imponendo le condizioni al contorno si trova $A = -1$ e $B = 10$.

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 20.01.10

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Duva G	5	0	2	3.5	4.5	1.5	16.5/30
Cherubini V	0	0	2	4	2.5	2.5	11/30
Calabro' E	0	0	0	3	0	3	6/30
Figliolini N	0	0	0	4	2.5	2.5	9/30
Barbini P	0	0	0	0	0	1	1/30
Battistoni S	0	0	2	2.5	2.5	0.5	7.5/30
La Regina B	0.5	0	0	0	0	0	0.5/30
Fava A	5	0	2	1	0	4	12/30
Latini S	3	3	3.5	4	5	4	22.5/30
Porchetta D	4	0.5	5	2	2.5	3	17/30
Mattoni G	5	5	5	5	5	5	30/30
De Carolis D	1.5	0	0	2	2.5	4	10/30
Benedetto D	0	0	1	2	2	0	5/30
Neri A	1.5	1.5	0	4	5	5	17/30
Di Carlo Rosi D	5	0	5	3	5	3	21/30
Campaniello V	0	1	0	0	2.5	5	8.5/30
Papale D	0	0	0	2	5	2.5	9.5/30
Tebi S	5	0	5	1	5	3	19/30
Speroni A	0	0	0	3	1	1.5	5.5/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci