Esame di Complementi di Calcolo

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 21 Settembre 2010, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Sia data la funzione complessa $f(x,y) = \cos z + i \sin z^*$ con $z = x + iy$ e z^* il complesso coniugato di z.
1) La funzione f e' analitica? (Motivare la risposta)
2) Calcolare $|f(x,y)|^2$.

Problema 2

Sia data la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{1}{e^{1/z}-1}$.
1) Per quali valori di z la funzione ha singolarita' isolate?
2) Calcolare i residui di f per tutte le singolarita' isolate.
3) Calcolare $I = \oint_\gamma dz f(z)$ con γ un cerchio di centro nell'origine e raggio 1 orientato in senso antiorario.

Problema 3

Sia data la funzione polidroma $f(z) = \sqrt{z} \ln z$. Sul piano complesso con un taglio da 0 a ∞ la funzione $f(z)$ vale $-6\pi i$ per $z = 1 + i\delta$ con δ infinitesimo (il punto z si trova cioe' sopra il taglio). Calcolare il valore della funzione in $z = 4i$.

Problema 4

Calcolare la parte principale $I = P \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\sin x}{x-\pi/2}$.

Problema 5

Calcolare e^{iA} con la matrice $A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$.

Problema 6

Si risolva l'equazione differenziale

$$y'(x) + y(x)\sin^2 x \cos x = \sin^2 x \cos x$$

con condizioni al contorno $y(0) = 2$.

Soluzione Problema 1

1) f non e' analitica in quanto non puo' scriversi come funzione della sola z. 2) Risulta

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y} + e^{ix+y} - e^{-ix-y}\right) = e^{y}\cos x + ie^{-y}\sin x$$

e pertanto $|f(x,y)|^2 = e^{2y}\cos^2 x + e^{-2y}\sin^2 x$.

Soluzione Problema 2

1) Il denominatore della funzione si annulla per $z = z_n = \frac{1}{2\pi i n}$ con n intero. 2) Posto allora $z = z_n + w$ risulta

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{z_n+w}} = e^{\frac{1}{z_n}\frac{1}{1+w/z_n}} \sim e^{\frac{1}{z_n}(1-\frac{w}{z_n})} = e^{-\frac{w}{z_n^2}} \sim 1 - \frac{w}{z_n^2},$$

da cui ne segue che il residuo in z_n e' $R_n = -z_n^2 = \frac{1}{4\pi^2 n^2}$. 3) Utilizzando il teorema dei residui avremo che $I = 2\pi i \sum_{n\neq 0} R_n = \frac{i}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{i}{\pi}\frac{\pi^2}{6}$.

Soluzione Problema 3

Per prima cosa occorre determinare il ramo della funzione. Posto $z = \rho e^{i\theta + 2k\pi i}$ risulta

$$f(z) = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}}(\ln\rho + i\theta + 2k\pi i).$$

Per $z = 1$ sopra il taglio avremo $\rho = 1$ e $\theta = 0$, e dunque affiche' in questo punto $f(z)$ valga $-6\pi i$ deve essere $k = 3$. Il valore della funzione in $4i$ si ottiene allora dalla formula qui sopra con $\rho = 4$, $\theta = \pi/2$ e $k = 3$ e vale $-2e^{i\pi/4}(\ln 4 + i\frac{13\pi}{2})$.

Soluzione Problema 4

Risulta $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\sin x}{x-\pi/2+i\eta} + i\pi\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-\pi/2)\sin x$, con η infinitesimo. Il secondo integrale fornisce $i\pi$. Il primo integrale si puo' spezzare in due parti utilizzando che $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. La parte con e^{ix} si calcola chiudendo il cammino nel semipiano superiore e dà risultato nullo in quanto il polo si trova in $z = \pi - i\eta$. La parte con e^{-ix} si calcola chiudendo il cammino nel semipiano inferiore e utilizzando il teorema dei residui si trova $I = \frac{1}{2i}(-2\pi i)(-e^{-i\pi/2}) = -i\pi$. Pertanto $I = 0$.

Soluzione Problema 5

La matrice $A = e^{i\varphi}\mathbf{1} + \cos(\alpha)\sigma_x + \sin(\alpha)\sigma_y$, dove $\mathbf{1}$ e' la matrice identita' 2×2 e le σ_i sono le matrici di Pauli. Risulta allora $e^{iA} = e^{ie^{i\varphi}}e^{i(\cos(\alpha)\sigma_x + \sin(\alpha)\sigma_y)}$. A questo punto usiamo la formula $e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}} = \cos(\theta)\mathbf{1} + i\sin(\theta)\frac{\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}}{\theta}$ con $\theta = |\vec{\theta}|$. Nel nostro caso $\theta_x = \cos(\alpha)$, $\theta_y = \sin(\alpha)$ e $\theta_z = 0$, e dunque $\theta = 1$. In conclusione

$$e^{iA} = e^{ie^{i\varphi}}\left[\cos(1)\mathbf{1} + i\sin(1)\left(\cos(\alpha)\sigma_x + \sin(\alpha)\sigma_y\right)\right] = e^{ie^{i\varphi}}\begin{pmatrix} \cos(1) & ie^{-i\alpha}\sin(1) \\ ie^{i\alpha}\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$

Soluzione Problema 6

L'equazione differenziale puo' riscriversi come $\frac{y'(x)}{1-y(x)} = \sin^2 x\cos x$. Integrando tra 0 ed x troviamo

$$-\ln\frac{1-y(x)}{1-y(0)} = \frac{1}{3}\sin^3 x,$$

e tenendo presente che $y(0) = 2$ si trova $y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{3}\sin^3 x}$.

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 21.09.10

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Caponi G	2	0	3	5	0	3	13/30
Giuliano G	3	0.5	0	1	0	2	6.5/30
De Carolis D	5	0	5	5	5	3	23/30
Barbini P	5	0	5	5	1.5	5	21.5/30
Papale D	5	0	5	3	4	5	22/30
Cherubini V	2.5	0.5	-	5	1	3	12/30
La Regina B	1	0	-	0	1	1	3/30
Fava A	2.5	0	-	5	3	1	11.5/30
Beltotto A	0	0.5	3	5	0	5	13.5/30
Pinchetti V	2	1	4	5	1	0	13/30
Campaniello V	2	4	4	5	3.5	3.5	22/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci