Esame di Complementi di Calcolo

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 25 Febbraio 2008, tempo disponibile 2 ore e mezzo

---

Problema 1

Trovare tutte le radici dell'equazione $(\cos z)^2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{3i}{4})$.

Problema 2

Nota la parte reale $u(x,y) = 2xy + x$ della funzione di variabile complessa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
a) Verificare che u e' armonica
b) Costruire la parte parte immaginaria v con $v(0,0) = 0$ e verificare che anch'essa e' armonica
c) Determinare $f(z)$ come funzione della sola variabile z
Per risolvere il punto b) si ricordi che $v(x,y) = v(x_0,y_0) - \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' \frac{\partial u}{\partial y}(x',y_0) + \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y' \frac{\partial u}{\partial x}(x,y')$

Problema 3

Data $f(x) = (x-1)^2$ determinare l'ascissa di convergenza e calcolare la sua trasformata di Laplace $f_L(s)$. Riottenere poi $f(x)$ facendo l'antitrasformata.
Suggerimento: vale la seguente relazione $\int_0^\infty \mathrm{d}x e^{-sx} x^n = \frac{n}{s} \int_0^\infty \mathrm{d}x e^{-sx} x^{n-1}$

Problema 4

Siano date la matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i\sqrt{5} \\ 0 & 2-i\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare il commutatore $C = [A, B]$
b) Trovare una base di autovettori ortonormali comuni di A e B

Problema 5

Data la matrice

$$A = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare il risolvente $(z - A)^{-1}$.
b) Calcolare $f(A)$ utilizzando la formula $f(A) = 1/(2\pi i) \oint_\gamma \mathrm{d}z f(z)(z-A)^{-1}$ con $f(z) = \cos z \sin z$ (si ricordi che la curva γ circonda tutti gli autovalori di A).

Problema 6

Sia data l'equazione differenziale

$$y''(t) - \frac{3}{4t^2} y = \sqrt{t}$$

a) Verficare che $y_1(t) = 1/\sqrt{t}$ e' soluzione dell'omogenea associata
b) Calcolare la seconda soluzione $y_2(t)$ dell'omogenea ricordando che $y_2(t) = y_1(t) \int_0^t dt'/y_1^2(t')$
c) Calcolare la soluzione particolare $y_p(t)$ ricordando che note le 2 soluzioni indipendenti y_1 e y_2 della generica equazione differenziale $y''(t) + C(t)y(t) = g(t)$ risulta essere

$$y_p(t) = \frac{1}{w} \int_0^t dt' [y_1(t) y_2(t') - y_1(t') y_2(t)] g(t')$$

dove $w = y_1'(t) y_2(t) - y_1(t) y_2'(t)$ e' il wronskiano.

Soluzione Problema 1

Il problema si risolve scrivendo $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ e si trova $e^{2iz} = -2i$ oppure $e^{2iz} = i/2$. Nel primo caso avremo $z = -\pi/4 + n\pi - i \ln \sqrt{2}$ mentre nel secondo caso avremo $z = \pi/4 + n\pi + i \ln \sqrt{2}$.

Soluzione Problema 2

a) La funzione u e' lineare separatamente nelle variabili x ed y ed e' pertanto armonica.
b) Facendo l'integrale suggerito ed utilizzando la condizione al contorno $v(0,0) = 0$ si trova $v(x,y) = -x^2 + y^2 + y$ che e' banalmente armonica.
c) $f(z) = z - iz^2$.

Soluzione Problema 3

L'ascissa di convergenza e' $\alpha = 0$. Dalla definizione della trasformata di Laplace e utilizzando la relazione suggerita e' immediato trovare che $f_L(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$. L'antitrasformata si ottiene chiudendo il contorno nel semipiano con $\mathrm{Re}[s] < 0$ e sommando il residuo delle tre funzioni singolari in $s = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \mathrm{d}s \left(\frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) e^{sx} = \left(\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} 2e^{sx}\right)_{s=0} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} 2e^{sx}\right)_{s=0} + 1 = (x-1)^2.$$

Soluzione Problema 4

a) Il commutatore e' $C = 0$.
b) Gli autovettori ortonormali comuni sono

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + i\sqrt{5} \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + i\sqrt{5} \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione Problema 5

a) Il risolvente e'

$$(z - A)^{-1} = \frac{1}{z(z - \pi/2)} \begin{pmatrix} z - \frac{\pi}{4} & -i\frac{\pi}{4} \\ i\frac{\pi}{4} & z - \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Poiche' $f(z)$ e' nulla nei punti in cui $(z - A)^{-1}$ e' singolare, risulta che $f(A)$ e' la matrice nulla.

Soluzione Problema 6

a) Risulta $y_1''(t) - \frac{3}{4t^2} y_1(t) = \frac{3}{4} t^{-5/2} - \frac{3}{4} t^{-5/2} = 0$.
b) Dalla definizione si trova $y_2(t) = t^{3/2}$ ed e' immediato verificare che soddisfa l'omogenea.
c) Posto allora $y_1(t) = t^{-1/2}$ e $y_2(t) = t^{3/2}$ il wronskiano e' $w = -2$ e pertanto la soluzione particolare e' $y_p(t) = t^{5/2}/3$.

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 25.02.08

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Marrani M	1	5	1	2	5	3	17/30
Di Giacomo F	4	5	1	3	2	5	20/30
Iannacci A	1	4	1	3	2	0	11/30
Fanicchia F	0	5	3	2	2	4	16/30
Guarnieri L	0	1	2	3	4	2	12/30
Cervelli F	0	5	3	2	3	0	13/30
Galeotti G	1	5	1	1	0	4	12/30
D'Elia E	0	5	1	2	1	3	12/30
Di Mario L	0	5	5	2	5	1	18/30
Giacani V	1	5	3	5	4	5	23/30
Pisani C	3	0	2	1	2	3	11/30
Rubino P	0	3	0	0	0	3	6/30
Magni C	1	5	5	2	2	5	20/30
De Marchi F	0	3	2	1	2	0	8/30

Ammessi alla prova orale del 28/02 o del 03/03 coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci