Esame di Metodi Matematici

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 26 Giugno 2009, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Data nel piano della variabile complessa $z = x + iy$ la funzione $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u(x, y) = x^2\sqrt{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$ calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_\gamma dz\, f(x, y)$$

dove γ e' un segmento che congiunge l'origine al punto $(1, i)$.

Problema 2

Si consideri la funzione polidroma $f(z) = \ln z^3$. Tagliando il piano complesso tra 0 e ∞ lungo l'asse reale e specificando che la parte immaginaria di $f(z)$ per $z = 1$ sopra il taglio e' $\mathrm{Im}[f(z)] = 6\pi i$, calcolare $f(z)$ in $z = -3$ e $f(z)$ in $z = 2$ sotto il taglio.

Problema 3

Si calcolino i coefficienti f_k dello sviluppo in serie di Fourier

$$\frac{1}{\sin x + 2i} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}$$

(Suggerimento: Si effettui il cambio di variabile $z = e^{ix}$).

Problema 4

In uno spazio vettoriale di dimensione 2 si consideri la base ortonormale $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$. Dati gli operatori lineari $A = |\psi_1\rangle\langle\psi_2|$ e $B = |\psi_2\rangle\langle\psi_1|$ si calcoli $\langle\psi_2|\cos(A)\cos(B)|\psi_2\rangle$, $\langle\psi_2|\cos(AB)|\psi_2\rangle$ e $\langle\psi_2|\cos(A + B)|\psi_2\rangle$.

Problema 5

In uno spazio vettoriale di dimensione 3 siano dati i vettori $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle$ con prodotto scalare

$$\langle a_m|a_n\rangle = \cos[\beta(m - n)], \qquad m, n = 1, 2, 3$$

dove β e' una costante reale.
1) Esistono valori di β per i quali i vettori $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle$ sono linearmente indipendenti? Se si determinarli.
2) Per tutti gli altri valori di β esprimere $|a_3\rangle$ come combinazione lineare di $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$.

Problema 6

Trovare la soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}f(x) + 5\frac{\sin x}{\cos x}f(x) = 0$$

con condizione al contorno $f(\pi) = 2$.

Soluzione Problema 1

Lungo la curva γ si ha $z = \rho e^{i\frac{\pi}{4}}$ con $\rho \in (0, \sqrt{2})$. Quindi $x = \rho\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ e $y = \rho\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ da cui $u(x,y) = \frac{1}{2}\rho^3$ e $v(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2$. Ne segue che $I = e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \left[\frac{1}{2}\rho^3 + \frac{i}{\sqrt{2}}\rho^2\right] = e^{i\frac{\pi}{4}}[\frac{1}{2} + \frac{2i}{3}]$.

Soluzione Problema 2

Posto $z = \rho e^{i\theta}$ risulta $f(z) = 3\ln\rho + 3i\theta + 6k\pi i$ con k intero. Per $z = 1$ sopra il taglio si ha $\rho = 1$ e $\theta = 0$ e quindi $f(1) = 6k\pi i$ da cui segue che $k = 1$ per soddisfare il dato del problema. Per conoscere il valore della funzione in $z = -3$ poniamo $z = 3e^{i\pi}$ da cui $f(3e^{i\pi}) = 3\ln 3 + 9\pi i$. Infine per $z = 2$ sotto il taglio poniamo $z = 2e^{2\pi i}$ e quindi $f(2e^{2\pi i}) = 3\ln 2 + 12\pi i$.

Soluzione Problema 3

Dalla teoria si ha che $f_k = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2\pi}\frac{e^{-ikx}}{\sin x + 2i}$. Scrivendo $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ed effettuando il cambio di variabile suggerito dal problema troviamo

$$f_k = \frac{1}{\pi}\oint_\gamma dz \frac{z^{-k}}{z^2 - 4z - 1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{5}}\oint_\gamma dz \left\{\frac{z^{-k}}{z - (2+\sqrt{5})} - \frac{z^{-k}}{z - (2-\sqrt{5})}\right\}$$

dove γ e' il cerchio di raggio 1 con centro nell'origine. Il polo in $2 + \sqrt{5}$ e' fuori da γ e non contribuisce mai. Per $k \le 0$ contribuisce solo il secondo integrale in quanto z^{-k} e' analitica e si trova $f_k = -\frac{2\pi i}{2\pi\sqrt{5}}(2-\sqrt{5})^{-k}$. Per $k > 0$ abbiamo in tutti e due gli integrali un polo di ordine k nell'origine. Avremo allora

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{2\pi i}{2\pi\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\frac{1}{z-(2+\sqrt{5})}\bigg|_{z=0} - \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\frac{1}{z-(2-\sqrt{5})}\bigg|_{z=0} - (2-\sqrt{5})^{-k}\right\} \\ &= -\frac{2\pi i}{2\pi\sqrt{5}}(2+\sqrt{5})^{-k}. \end{aligned}$$

Soluzione Problema 4

E' immediato osservare che $A^2 = B^2 = 0$ e che $AB = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$, $BA = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ da cui $(A+B)^2 = 1$. Pertanto $\cos(A)\cos(B) = 1$, $\cos(AB) = \cos(1)|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ e $\cos(A+B) = \cos(1)$. Ne segue che i brackets richiesti valgono rispettivamente 1, 0, $\cos(1)$.

Soluzione Problema 5

1) Per rispondere al primo punto basta calcolare il determinate della matrice di elementi $\langle a_m|a_n\rangle$. Utilizzando l'identita' $\cos 2\beta = -1 + 2\cos^2\beta$ e' facile verificare che il determinante e' sempre nullo e che pertanto non esistono valori di β per i quali i vettori sono linearmente indipendenti.

2) Per $\beta = 2n\pi$ si trova $|a_3\rangle = |a_2\rangle = |a_1\rangle$. In tutti gli altri casi posto $|a_3\rangle = x|a_1\rangle + y|a_2\rangle$ possiamo ottenere 2 equazioni per i coefficienti x e y moltiplicando la precedente relazione per i bra $\langle a_1|$ e $\langle a_2|$. Cosi facendo si ottiene

$$\cos 2\beta = x + y\cos\beta, \qquad \cos\beta = x\cos\beta + y$$

da cui si ricava $x = -1$ e $y = 2\cos\beta$.

Soluzione Problema 6

La generica soluzione e' $f(x) = A\cos^5(x)$. La costante A e' fissata da $f(\pi) = -A = 2$. Pertanto la soluzione del problema e' $f(x) = -2\cos^5(x)$

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 26.06.09

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	esercizio 6	voto
Valguarnera A	5	0	5	0	1	5	16/30
Cervelli F	5	0	1	0	0	3	9/30
Puddu M	5	3	5	0	2	5	20/30
Barbini P	0	0	1	0	0	2.5	3.5/30
De Carolis D	5	0	4.5	1	0	0	11.5/30
Fava A	0	0	1.5	0	0	0	1.5/30
Tebi S	4.5	0	3.5	5	1	0	14/30
Mori S	5	0	2.5	5	1	4.5	18/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci