Esame di Complementi di Calcolo

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 29 Settembre 2008, tempo disponibile 2 ore e mezzo

---

Problema 1

Si calcoli la funzione $f(y)$ definita come

$$f(y) = \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} \sin(x) e^{ip(x^2-y^2)}$$

con y reale e diverso da zero. Si calcoli poi il limite $\lim_{y \to 0^\pm} f(y)$.

Problema 2

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x - 1 + \frac{1}{x-1}}.$$

Problema 3

Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix}$. Si calcoli la funzione di matrice $\exp[iA^3]$.

Problema 4

Si determinino tutti i poli della funzione $f(z) = \frac{1}{e^{\beta(z-\mu)}+1}$ con β e μ costanti reali. Si calcoli poi il residuo della funzione in ciascun polo.

Problema 5

Sia data l'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti non costanti e non omogenea

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = -e^{-x}.$$

Si determini la soluzione nella regione $x < 0$ con condizione al contorno $y(-1) = 2$.

Soluzione Problema 1

Integrando dapprima sulla variabile p troviamo $f(y) = \int_0^\infty dx \sin(x)\delta(x^2 - y^2) = \int_0^\infty dx \frac{\sin(x)}{2|y|}[\delta(x-y) + \delta(x+y)] = \sin(|y|)/(2|y|)$. Pertanto $\lim_{y\to 0^\pm} f(y) = \frac{1}{2}$

Soluzione Problema 2

La funzione puo' riscriversi come $f(x) = \frac{x-1}{(x-1+i)(x-1-i)}$. La trasformata $\tilde{f}(p) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ipx} f(x)$ puo' essere calcolata utilizzando il teorema dei residui. Chiudendo l'integrale nel semipiano superiore per $p > 0$ e nel semipiano inferiore per $p < 0$, il risultato finale e'

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} \pi i e^{ip-p} & p > 0 \\ -\pi i e^{ip+p} & p < 0 \end{cases} .$$

Soluzione Problema 3

E' immediato verificare che $A^2 = (a^2 + b^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Posto $\rho^2 = a^2 + b^2$ avremo $A^3 = \rho^2 A$ e quindi

$$\begin{aligned} e^{iA^3} &= e^{i\rho^2 A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(\rho^2)^n A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!}(\rho^2)^{2n} A^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!}(\rho^2)^{2n+1} A^{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!}(\rho^3)^{2n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} \frac{(\rho^3)^{2n+1}}{\rho} \begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix} = \cos(\rho^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \frac{\sin(\rho^3)}{\rho} \begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soluzione Problema 4

I poli della funzione sono dati dagli zeri del denominatore. L'equazione $e^{\beta(z-\mu)} + 1 = 0$ e' risolta dalle radici $z_n = \frac{i}{\beta}(2n+1)\pi + \mu$. Il residuo del polo in z_n e' dato da $R_n = \lim_{z\to z_n} \frac{z - z_n}{e^{\beta(z-\mu)}+1}$. Per calcolare tale limite poniamo $z = z_n + w$ e sviluppiamo il denominatore in serie di Taylor rispetto a w. Avremo $e^{\beta(z-\mu)} + 1 = e^{\beta(z_n+w-\mu)} + 1 = -\beta w + O(w^2)$. Quindi

$$R_n = \lim_{z\to z_n} \frac{z - z_n}{e^{\beta(z-\mu)} + 1} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{-\beta w + O(w^2)} = -\frac{1}{\beta}$$

Soluzione Problema 5

La soluzione piu' generale per l'equazione $y'(x) + C(x)y(x) = f(x)$ e' data da

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x duC(u)} \left[y_0 + \int_{x_0}^x dv f(v) e^{\int_{x_0}^v duC(u)} \right].$$

Nel nostro caso $x_0 = -1$ e $y_0 = y(x_0) = 2$. Le funzioni sono $C(x) = 1/x$ e $f(x) = -e^{-x}$. Risulta $\int_{x_0}^x duC(u) = \ln(-x)$ e pertanto

$$y(x) = -\frac{1}{x}\left[2 + \int_{x_0}^x dv v e^{-v}\right] = -\frac{1}{x}\left[2 - (1+v)e^{-v}\Big|_{-1}^{x}\right] = -\frac{2}{x} + \frac{1+x}{x}e^{-x}$$

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 29.09.08

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	voto
Galeotti G	0	0	3	2	0	5/30
D'Elia E	2	0	3	2	0	7/30
Barbera D	0	0	3	1	0	4/30
Iannaci A	1	1	3	0	0	5/30
Lucatelli E	0	2	6	2	6	16/30
Guarnieri L	0	0	3	6	6	15/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci