Esame di Complementi di Calcolo

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali - Gianluca Stefanucci

Prova scritta del 30 Giugno 2008, tempo disponibile 2 ore e mezzo

---

Problema 1

Si calcoli l'integrale $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ usando il cambio di variabile $z = e^{i\theta}$.

Problema 2

a) Integrando per parti si dimostri che se $\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx} f(x)$ e' la trasformata di Fourier di $f(x)$, allora la trasformata di Fourier di $f'(x)$ e' $ip\tilde{f}(p)$ (Si ricordi che $f(\pm\infty) = 0$).

b) Si utilizzi il precedente risultato per calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(ax+b)e^{-x^2}$.

Problema 3

Sia data la base ortonormale $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$ di uno spazio di dimensione 2 e sia A un operatore la cui azione sui vettori di base e'

$$A|a_1\rangle = 2|a_1\rangle + i|a_2\rangle, \qquad A|a_2\rangle = -i|a_1\rangle + |a_2\rangle$$

a) Calcolare la matrice che rappresenta A nella base $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$.

b) Si consideri il cambiamento di base $|b_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|a_1\rangle + \frac{i}{2}|a_2\rangle$, $|b_2\rangle = \frac{i}{2}|a_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|a_2\rangle$. Si dimostri che anche la base $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ e' ortonormale e si scriva la matrice che rappresenta l'operatore A in questa nuova base.

c) Si calcoli la traccia delle due matrici che rappresentano A nelle due basi e si commenti il risultato.

Problema 4

Sviluppare in serie di Laurent la funzione $f(z) = (z - 1 + \sqrt{\frac{2}{3}})^2 \sin(\frac{1}{z-1})\cos(\frac{1}{z-1})$ attorno al punto $z_0 = 1$ e determinare il residuo.

Problema 5

a) Determinare la funzione $f(t)$ che soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d^3}{dt^3}f + 3\frac{d^2}{dt^2}f + 3\frac{d}{dt}f + f = 0$$

con condizioni iniziali $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = -1$.

b) Sviluppare la funzione ottenuta in serie di Taylor attorno al punto $t = -1$.

Soluzione Problema 1

Risulta $d\theta = -idz/z$ e $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$. L'integrale diventa allora $I = 2\oint_c \frac{dz}{z^2+4iz-1}$ dove c e' il cerchio di raggio 1 di centro nell'origine. La funzione integranda ha due poli semplici in $z_\pm = -2i \pm i\sqrt{3}$. Poiche' solo z_+ e' interno a c si trova $I = 2\pi/\sqrt{3}$.

Soluzione Problema 2

a) Denotando con $\tilde{f}'(p)$ la trasformata di Fourier di $f'(x)$, integrando per parti si trova $\tilde{f}'(p) = e^{-ipx}f(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx(\frac{d}{dx}e^{-ipx})f(x)$. Il primo termine e' nullo in quanto $f(\pm\infty) = 0$. Esplicitando la derivata nel secondo termine si trova $\tilde{f}'(p) = ip\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ipx}f(x) = ip\tilde{f}(p)$.

b) E' immediato verificare che la funzione data si puo' scrivere come $f(x) = -\frac{a}{2}\frac{d}{dx}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} + b\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$. Poiche' la trasformata di Fourier di $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$ e' $e^{-p^2/2}$, utilizzando il risultato del punto a) si trova $\tilde{f}(p) = (-\frac{a}{2}ip + b)e^{-p^2/2}$.

Soluzione Problema 3

a) La matrice che rappresenta A nella base $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$ e'

$$\underline{A}_a = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Risulta $\langle b_1|b_1\rangle = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, $\langle b_2|b_2\rangle = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ e $\langle b_1|b_2\rangle = i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0$, e dunque la base $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ e' ortonormale. La matrice che rappresenta A nella nuova base ha elementi di matrice $[\underline{A}_b]_{ij} = \langle b_i|A|b_j\rangle = \sum_{mn}\langle b_i|a_m\rangle\langle a_m|A|a_n\rangle\langle a_n|b_j\rangle = [\underline{U}\,\underline{A}_a\underline{U}^\dagger]_{ij}$, dove $\underline{U}$ e' la matrice unitaria di elementi $\underline{U}_{ij} = \langle b_i|a_j\rangle$ che esplicitamente e' data da

$$\underline{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -i \\ -i & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{A}_b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7+2\sqrt{3} & -2i+i\sqrt{3} \\ 2i-i\sqrt{3} & 5-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

c) La traccia e' in entrambe i casi 3 ed il fatto che e' la stessa discende dall'invarianza della traccia a seguito di un cambiamento di base ortonormale.

Soluzione Problema 4

La funzione data si puo' riscrivere come $f(z) = [(z-1)^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}(z-1) + \frac{2}{3}]\frac{1}{2}\sin(\frac{2}{z-1})$. La sua espansione di Laurent e' allora

$$f(z) = \left[(z-1)^2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}(z-1) + \frac{2}{3}\right]\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{z-1}\right)^{2n+1}.$$

Il residuo e' dato dal coefficiente che moltiplica $(z-1)^{-1}$ ed e' pertanto 0.

Soluzione Problema 5

a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare omogenea e a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico e' $P(a) = (a+1)^3$ e pertanto la soluzione piu' generale e' data da $f(t) = (A + Bt + Ct^2)e^{-t}$. Risulta $f(0) = A = 1$, $f'(0) = -A + B = -1 + B = 1$ che implica $B = 2$, e infine $f''(0) = A - 2B + 2C = 1 - 4 + 2C = -3 + 2C = -1$ che implica $C = 1$. Pertanto la soluzione e' $f(t) = (t+1)^2e^{-t}$.

b) Lo sviluppo in serie di Taylor e'

$$f(t) = (t+1)^2e^{-(t+1)+1} = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}(t+1)^{n+2}.$$

PROVA SCRITTA COMPLEMENTI DI CALCOLO DEL 30.06.08

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	esercizio 4	esercizio 5	voto
Pisani C	4	5	6	2	1	18/30
D'Elia E	4	2	5	1	1	13/30
Fanicchia F	4	6	5	5	4	24/30
Barbera D	0	3	0	2	2	7/30
Galeotti G	2	5	5	1	1	14/30
De Marchi F	3	3	2	4	0	12/30
Guarnieri L	1	3	3	5	0	12/30
Cervelli F	0	3	2	2	0	7/30
Di Mario L	6	3	6	2	5	22/30
Lucatelli E	0	3	5	3	3	14/30
Iannaci A	2	4	2	4	4	16/30
Magni C	4	3	6	0	4	17/30

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 16.

Il docente
Gianluca Stefanucci