Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 04 Settembre 2020, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Si consideri una particella di massa m descritta dalla Hamiltoniana dell'oscillatore armonico $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$. La particella si trova nello stato coerente $|\gamma\rangle = e^{-\frac{|\gamma|^2}{2}}e^{\gamma\hat{a}^\dagger}|0\rangle$, dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale di $\hat{H}$ e l'operatore $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\hat{x}}{x_0} - i\frac{x_0\hat{p}}{\hbar})$ con $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Nel caso in cui $\gamma = e^{i\alpha}$ con α reale determinare

i. Il valore medio $\langle\gamma|\hat{x}^2|\gamma\rangle$ e stabilire per quali valori di α esso è massimo

ii. Il valore medio $\langle\gamma|\hat{p}^2|\gamma\rangle$ e stabilire per quali valori di α esso è massimo

iii. Il prodotto delle varianze $\langle\hat{\sigma}_p^2\rangle\langle\hat{\sigma}_x^2\rangle$ e stabilire per quali valori di α esso è minimo. Verificare quindi il principio di indeterminazione di Heisenberg.

(Si ricordi che dato un operatore $\hat{O}$ la varianza è definita come il valore medio di $\hat{\sigma}_O^2 = \hat{O}^2 - \langle\hat{O}\rangle^2$ dove nel caso del presente problema *tutti i valori medi sono rispetto allo stato coerente* $|\gamma\rangle$).

Problema 2

Una particella di spin $\frac{1}{2}$ e momento angolare orbitale $l = 1$ ruota liberamente intorno all'asse z essendo soggetta all'hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_z^2}{2I}$$

dove $\hat{L}_z$ è la componente z del suo momento angolare orbitale e I è il momento di inerzia della particella. La particella è preparata al tempo $t = 0$ in un'autostato simultaneo di $\hat{J}^2$ e di $\hat{J}_z$ (dove $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ è il momento angolare totale) con autovalori $\frac{3}{4}\hbar^2$ e $\frac{1}{2}\hbar$ rispettivamente.

Determinare a quali tempi t^* la probabilità che una misura di $\hat{J}^2$ dia come risultato il valore $\frac{15}{4}\hbar^2$ sia massima.

Problema 3

Si consideri una particella di massa m in una dimensione descritta dalla Hamiltoniana $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ dove

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La particella si trova inizialmente nello stato fondamentale di $\hat{H}_0$ e viene poi disturbata dalla perturbazione dipendente dal tempo

$$\lambda\hat{P}(t) = \lambda\frac{\hbar L}{2}\delta(\hat{x} - \frac{L}{2})\delta(t - \frac{4mL^2}{\pi\hbar})$$

Calcolare all'ordine più basso in λ la probabilità di misurare energia $E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2}$ ad un generico tempo.

(Si usi che gli autokets della funzione di operatore $\delta(\hat{x}-\frac{L}{2})$ sono gli autokets della posizione: $\delta(\hat{x}-\frac{L}{2})|x\rangle = \delta(x-\frac{L}{2})|x\rangle$).

Soluzione Problema 1

Ricordiamo che $\hat{a}|\gamma\rangle = \gamma|\gamma\rangle$ e che $\langle\gamma|\gamma\rangle = 1$. Risulta $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, quindi

$$\langle\gamma|\hat{x}^2|\gamma\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle\gamma|\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}|\gamma\rangle = x_0^2\left[\frac{3}{2} + \cos(2\alpha)\right]$$

Pertanto il valor medio $\langle\gamma|\hat{x}^2|\gamma\rangle$ è massimo per $\alpha = n\pi$ con n intero. Risulta poi $\hat{p} = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}x_0}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$. Quindi

$$\langle\gamma|\hat{p}^2|\gamma\rangle = -\frac{\hbar^2}{2x_0^2}\langle\gamma|\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}|\gamma\rangle = \frac{\hbar^2}{x_0^2}\left[\frac{3}{2} - \cos(2\alpha)\right]$$

Pertanto il valor medio $\langle\gamma|\hat{p}^2|\gamma\rangle$ è massimo per $\alpha = n\pi + \pi/2$ con n intero. Essendo poi $\langle\gamma|\hat{x}|\gamma\rangle = \sqrt{2}x_0\cos(\alpha)$ e $\langle\gamma|\hat{p}|\gamma\rangle = \sqrt{2}\frac{\hbar}{x_0}\sin(\alpha)$ avremo

$$\langle\hat{\sigma}_x^2\rangle = x_0^2\left[\frac{3}{2} + \cos(2\alpha)\right] - 2x_0^2\cos^2(\alpha) = x_0^2\left[\frac{3}{2} + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) - 2\cos^2(\alpha)\right] = \frac{x_0^2}{2}$$

$$\langle\hat{\sigma}_p^2\rangle = \frac{\hbar^2}{x_0^2}\left[\frac{3}{2} - \cos(2\alpha)\right] - 2\frac{\hbar^2}{x_0^2}\sin^2(\alpha) = \frac{\hbar^2}{x_0^2}\left[\frac{3}{2} - \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\right] = \frac{\hbar^2}{2x_0^2}$$

Il prodotto richiesto $\langle\hat{\sigma}_x^2\rangle\langle\hat{\sigma}_p^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}$ è indipendente da α e satura la disuguaglianza del principio di indeterminazione di Heisenberg.

Soluzione Problema 2

In base ai dati del problema lo stato iniziale risulta $|\psi_0\rangle = |j, m_j\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Per determinare la sua evoluzione temporale dobbiamo scriverlo come combinazione lineare degli autoket di $\hat{H}$, che sono della forma $|1, m\rangle|\frac{1}{2}, m_s\rangle$ (con $m = -1, 0, 1$ e $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) e che hanno autovalori dell'energia $E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I}$. In particolare dalla composizione dei momenti angolari si ha che

$$|\psi_0\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \alpha|1, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta|1, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \tag{1}$$

con α e β costanti da determinare. Per determinare α e β ricordiamo che

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1, 1\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \tag{2}$$

e che

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{J}_-|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{3}$$

Il ket cercato $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ si ottiene ortonormalizzando rispetto a $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, e dunque lo stato iniziale risulta

$$|\psi_0\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \tag{4}$$

da cui segue $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\beta = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per determinare l'evoluzione temporale di $|\psi_0\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \alpha|1, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} + \beta|1, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle e^{-\frac{i\hbar t}{2I}} \end{aligned} \tag{5}$$

La probabilità $P(t)$ che una misura di $\hat{J}^2$ su tale stato fornisca al tempo t il valore $\frac{15}{4}\hbar^2$ equivale alla probabilità che il sistema sia (a meno di un fattore di fase) nello stato $|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$ in Eq. 10. Tale probabilità si ottiene calcolando il modulo quadro del prodotto scalare tra $|\psi(t)\rangle$ e $|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$:

$$\begin{aligned} P(t) &= |\langle\frac{3}{2},\frac{1}{2}|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 |1-e^{-\frac{i\hbar t}{2I}}|^2 = \frac{8}{9}|\sin(\frac{\hbar t}{4I})|^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Questa probabilità è massimizzata (e vale $P=\frac{8}{9}$) ai tempi t^* in cui $\sin(\frac{\hbar t^*}{4I})=\pm 1$. Pertanto risulta

$$t^* = \frac{4I\pi}{\hbar}(\frac{1}{2}+n) \tag{7}$$

con $n = 0, 1, 2\ldots$

Soluzione Problema 1

Ricordiamo che $\hat{a}|\gamma\rangle = \gamma|\gamma\rangle$ e che $\langle\gamma|\gamma\rangle = 1$. Risulta $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$, quindi

$$\langle\gamma|\hat{x}^2|\gamma\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle\gamma|\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}|\gamma\rangle = x_0^2\left[\frac{3}{2} + \cos(2\alpha)\right]$$

Pertanto il valor medio $\langle\gamma|\hat{x}^2|\gamma\rangle$ è massimo per $\alpha = n\pi$ con n intero. Risulta poi $\hat{p} = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}x_0}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$. Quindi

$$\langle\gamma|\hat{p}^2|\gamma\rangle = -\frac{\hbar^2}{2x_0^2}\langle\gamma|\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}|\gamma\rangle = \frac{\hbar^2}{x_0^2}\left[\frac{3}{2} - \cos(2\alpha)\right]$$

Pertanto il valor medio $\langle\gamma|\hat{p}^2|\gamma\rangle$ è massimo per $\alpha = n\pi + \pi/2$ con n intero. Essendo poi $\langle\gamma|\hat{x}|\gamma\rangle = \sqrt{2}x_0\cos(\alpha)$ e $\langle\gamma|\hat{p}|\gamma\rangle = \sqrt{2}\frac{\hbar}{x_0}\sin(\alpha)$ avremo

$$\langle\hat{\sigma}_x^2\rangle = x_0^2\left[\frac{3}{2} + \cos(2\alpha)\right] - 2x_0^2\cos^2(\alpha) = x_0^2\left[\frac{3}{2} + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) - 2\cos^2(\alpha)\right] = \frac{x_0^2}{2}$$

$$\langle\hat{\sigma}_p^2\rangle = \frac{\hbar^2}{x_0^2}\left[\frac{3}{2} - \cos(2\alpha)\right] - 2\frac{\hbar^2}{x_0^2}\sin^2(\alpha) = \frac{\hbar^2}{x_0^2}\left[\frac{3}{2} - \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - 2\sin^2(\alpha)\right] = \frac{\hbar^2}{2x_0^2}$$

Il prodotto richiesto $\langle\hat{\sigma}_x^2\rangle\langle\hat{\sigma}_p^2\rangle = \frac{\hbar^2}{4}$ è indipendente da α e satura la disuguaglianza del principio di indeterminazione di Heisenberg.

Soluzione Problema 2

In base ai dati del problema lo stato iniziale risulta $|\psi_0\rangle = |j, m_j\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Per determinare la sua evoluzione temporale dobbiamo scriverlo come combinazione lineare degli autoket di $\hat{H}$, che sono della forma $|1, m\rangle|\frac{1}{2}, m_s\rangle$ (con $m = -1, 0, 1$ e $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) e che hanno autovalori dell'energia $E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I}$. In particolare dalla composizione dei momenti angolari si ha che

$$|\psi_0\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \alpha|1,0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \beta|1,1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \tag{8}$$

con α e β costanti da determinare. Per determinare α e β ricordiamo che

$$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1,1\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \tag{9}$$

e che

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{J}_-|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{10}$$

Il ket cercato $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ si ottiene ortonormalizzando rispetto a $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, e dunque lo stato iniziale risulta

$$|\psi_0\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \tag{11}$$

da cui segue $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\beta = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per determinare l'evoluzione temporale di $|\psi_0\rangle$:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \alpha|1,0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} + \beta|1,1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle e^{-\frac{i\hbar t}{2I}} \end{aligned} \tag{12}$$

La probabilità $P(t)$ che una misura di $\hat{J}^2$ su tale stato fornisca al tempo t il valore $\frac{15}{4}\hbar^2$ equivale alla probabilità che il sistema sia (a meno di un fattore di fase) nello stato $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ in Eq. 10. Tale probabilità si ottiene calcolando il modulo quadro del prodotto scalare tra $|\psi(t)\rangle$ e $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$:

$$\begin{aligned} P(t) &= |\langle\frac{3}{2}, \frac{1}{2}|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 |1 - e^{-\frac{i\hbar t}{2I}}|^2 = \frac{8}{9}|\sin(\frac{\hbar t}{4I})|^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Questa probabilità è massimizzata (e vale $P = \frac{8}{9}$) ai tempi t^* in cui $\sin(\frac{\hbar t^*}{4I}) = \pm 1$. Pertanto risulta

$$t^* = \frac{4I\pi}{\hbar}(\frac{1}{2} + n) \tag{14}$$

con $n = 0, 1, 2 \ldots$

Soluzione Problema 3

Indichiamo con $|E_n^{(0)}\rangle$ gli autokets di $\hat{H}_0$ e con $\varphi_n(x) = \langle x|E_n^{(0)}\rangle = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L})$ le corrispondenti autofunzioni. Dalla teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo la probabilità richiesta è data da $|c_n(t)|^2$ dove

$$\begin{aligned} c_n(t) &= -i\frac{\lambda}{\hbar}\int_0^t dt' \langle E_n^{(0)}|\hat{P}(t')|E_1^{(0)}\rangle\, e^{i(E_n^{(0)} - E_1^{(0)})t'/\hbar} \\ &= -i\frac{\lambda}{\hbar}\frac{\hbar L}{2}\int_0^t dt' \int dx \langle E_n^{(0)}|x\rangle\langle x|\delta(\hat{x} - \frac{L}{2})|E_1^{(0)}\rangle \delta(t' - \frac{4mL^2}{\pi\hbar})e^{i(E_n^{(0)} - E_1^{(0)})t'/\hbar} \\ &= -i\frac{\lambda L}{2}\int_0^t dt' \delta(t' - \frac{4mL^2}{\pi\hbar})e^{i(E_n^{(0)} - E_1^{(0)})t'/\hbar}\int dx\, \varphi_n(x)\varphi_1(x)\delta(x - \frac{L}{2}) \end{aligned} \tag{15}$$

Quindi la probabilità è nulla se $t < \frac{4mL^2}{\pi\hbar}$. Invece nel caso in cui $t > \frac{4mL^2}{\pi\hbar}$ avremo

$$c_n(t) = -i\lambda \sin\frac{n\pi}{2} e^{i\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n^2-1)\frac{4mL^2}{\pi\hbar^2}} = -i\lambda\sin\frac{n\pi}{2} \tag{16}$$

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 04.09.2020

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Daniele Aceto	10	3	5	18
Valeria Battistelli	1	2	1	4
Elena Campagna	3	5	7.5	15.5
Giada Corti	3	7.5	8	18.5

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.