Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 05 Settembre 2019, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Un sistema a due livelli è descritto dall'Hamiltoniana $H = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$, $\epsilon > 0$, e si trova nello stato di energia più bassa.
(a) Qual'è il valor medio dell'energia?
A un certo istante si misura un'osservabile rappresentata dalla matrice $Z = \begin{pmatrix} 0 & z \\ z^* & 0 \end{pmatrix}$, con z numero complesso, e si trova il valore $|z|$.
(b) Dopo questa misura, qual'è la probabilità di misurare energia $-\epsilon$?
(c) E quella di misurare energia ϵ?
(d) E qual'è il valor medio dell'energia?
(e) Determinare la variazione del valor medio dell'energia dovuta alla misura di Z.

Problema 2

Si consideri una particella di spin 1/2 su una sfera e siano $|l, m_l\rangle|s, m_s\rangle$ gli autostati simultanei degli operatori di momento angolare orbitale L^2 e L_z con autovalori $\hbar^2 l(l+1)$ e $\hbar m_l$, e degli operatori di spin S^2 e S_z con autovalori $\hbar^2 s(s+1)$ e $\hbar m_s$ (per ipotesi $s = 1/2$).

Detto $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ il momento angolare totale, una misura simultanea di J^2, J_z e L^2 fornisce per i primi due operatori i valori $15\hbar^2/4$ e $\hbar/2$ con probabilità 1 e per il terzo operatore il valore $2\hbar^2$ con probabilità 1/2.
(a) Scrivere lo stato del sistema in termini degli autostati del momento angolare totale $|j, m_j; l, s\rangle$.
(b) Determinare il valor medio al tempo t dell'operatore $L_x S_x + L_y S_y$ se l'Hamiltoniana del sistema è $H = \epsilon L_z/\hbar$. (Suggerimento: espandere gli stati $|j, m_j; l, s\rangle$ nella base $|l, m_l\rangle|s, m_s\rangle$).

Formulario: $L_\pm = L_x \pm i L_y$, $L_\pm|lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}$ e similmente per gli operatori di spin e di momento angolare orbitale.

Problema 3

Si consideri un oscillatore armonico quantistico unidimensionale di frequenza ω e siano $|n\rangle$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$, gli autostati di energia $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. L'Hamiltoniana può dunque scriversi come $H = \sum_{n \geq 0} E_n |n\rangle\langle n|$. Sia data la piccola perturbazione $H' = \lambda\hbar\omega \sum_{n>0} \sqrt{n v^n}(|n\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle n|)$ con $\lambda \ll 1$ e v una costante numerica maggiore di zero. Determinare la correzione dell'energia dello stato fondamentale al primo e secondo ordine in λ. La correzione è finita indipendentemente dal valore di v? In caso negativo determinare per quali v la correzione diverge.

Soluzione Problema 1

Gli autovettori di H sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con autovalore $-\epsilon$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalore ϵ mentre quelli di Z sono $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z/|z| \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalore $|z|$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -z^*/|z| \\ 1 \end{pmatrix}$ con autovalore $-|z|$. Quindi la probabilità di misurare ϵ e $-\epsilon$ dopo aver misurato Z è $1/2$ ed è independente dal tempo. Il valor medio dell'energia è nullo ed essendo pari a $-\epsilon$ prima della misura di Z ne concludiamo che la sua variazione è pari ad ϵ.

Soluzione Problema 2

Indichiamo con $|j, m_j; l, \frac{1}{2}\rangle$ gli autostati simultanei di J^2, J_z, L^2, S^2 con autovalori $\hbar^2 j(j+1)$, $\hbar m_j$, $\hbar^2 l(l+1)$ e $3\hbar^2/4$ rispettivamente. Dai dati del problema $\hbar^2 j(j+1) = 15\hbar^2/4$, quindi $j = 3/2$, e $m_j = 1/2$. Per $s = 1/2$ il valore di j può ottenersi sia con $l = 1$ che con $l = 2$. Quindi il più generico stato $|\Psi\rangle$ compatibile con le misure di J^2 e J_z è

$$|\Psi\rangle = \alpha|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle + \beta|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2, \frac{1}{2}\rangle \tag{1}$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Conviene esprimere i due stati della combinazione lineare in termini di $|l, m_l\rangle|\frac{1}{2}, m_s\rangle$ per poter determinare l'evoluzione temporale. Avremo

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \tag{2}$$

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{6}{15}}|2, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{9}{15}}|2, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \tag{3}$$

Quindi lo stato del sistema al tempo t risulta essere

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|1, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + e^{-i\epsilon t}\sqrt{\frac{1}{3}}|1, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) + \beta\left(\sqrt{\frac{6}{15}}|2, 0\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - e^{-i\epsilon t}\sqrt{\frac{9}{15}}|2, 1\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) \tag{4}$$

Osserviamo ora che $\langle\Psi(t)|L_x S_x + L_y S_y|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\langle\Psi(t)|L_+ S_- + L_- S_+|\Psi(t)\rangle = \mathrm{Re}[\langle\Psi(t)|L_+ S_-|\Psi(t)\rangle]$. Quindi

$$\langle\Psi(t)|L_x S_x + L_y S_y|\Psi(t)\rangle = \hbar^2\left(|\alpha|^2\frac{2}{3} - |\beta|^2\frac{18}{15}\right)\cos(\epsilon t) \tag{5}$$

Poiché la probabilità di misurare $l = 1$ è $1/2$ avremo $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$ e dunque

$$\langle\Psi(t)|L_x S_x + L_y S_y|\Psi(t)\rangle = -\frac{4}{15}\hbar^2\cos(\epsilon t) \tag{6}$$

Soluzione Problema 3

Al primo ordine abbiamo $E_0^{(1)} = \langle 0|H'|0\rangle = 0$. Al secondo ordine avremo $E_0^{(2)} = -\sum_{n>0}|\langle 0|H'|n\rangle|^2/(n\hbar\omega)$. Poichè $\langle 0|H'|n\rangle = \lambda\hbar\omega\sqrt{nv^n}$ avremo

$$E_0^{(2)} = -\sum_{n>0}\frac{(\lambda\hbar\omega)^2 nv^n}{n\hbar\omega} = -\lambda^2\hbar\omega\sum_{n>0}v^n \tag{7}$$

Quindi $E_0^{(2)}$ è finita solo per $v < 1$ e vale $E_0^{(2)} = -\lambda^2\hbar\omega\frac{v}{1-v}$

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 05.09.2019

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Gian Maria Belardi	3	2	0	5
Elena Campagna	2	2	1	5
Marco Lorenzi	9	4	5	18
Elisabetta Loreti	3	4	5	12
Alessia Muroni	9	3	9	21
Davide Rinaldi	4	3	3	10
Cristiano Ruggieri	7	7	0	14

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.