Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 14 Giugno 2021, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Si consideri una particella di massa m in una dimensione soggetta al potenziale di due buche a pareti infinite di stessa larghezza a e distanti tra loro $2b$, quindi

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad b < |x| < b+a \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

i. Determinare le autofunzioni normalizzate e gli autovalori della Hamiltoniana
ii. Determinare la degenerazione degli autovalori
iii. È possibile costruire un'autofunzione dell'Hamiltoniana con autovalore $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ tale per cui la probabilità di trovare la particella nella buca di destra sia $1/3$? In caso affermativo determinare l'autofunzione altrimenti motivare perchè non è possibile

---

Problema 2

L'elettrone di un atomo di idrogeno si trova nello stato

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0,0;+\rangle + \frac{1}{2}\,|2,1,1;-\rangle + \frac{i}{2}\,|2,1,0;+\rangle$$

dove si è usata la notazione abbreviata $|n,l,m;\pm\rangle \equiv |n,l,m;\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ per gli autokets di numero quantico principale n, momento angolare l, numero quantico azimutale m e proiezione dello spin lungo l'asse zeta $\pm\hbar/2$.
i. Qualè la probabilità che una misura del quadrato del momento angolare totale $\hat{J}^2$ dia valore $3\hbar^2/4$?
ii. Calcolare il valor medio della Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}}$, ossia $\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle$
iii. Calcolare il valor medio della coordinata radiale, ossia $\langle\Psi|\hat{r}|\Psi\rangle$. Le funzioni radiali necessarie a svolgere questo punto sono

$$R_{10}(r) = \frac{2}{\sqrt{a_\mathrm{B}^3}}\,e^{-\frac{r}{a_\mathrm{B}}}, \qquad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{8a_\mathrm{B}^3}}\,\frac{r}{\sqrt{3}a_\mathrm{B}}e^{-\frac{r}{2a_\mathrm{B}}}$$

Problema 3

Si consideri un oscillatore armonico quantistico unidimensionale di frequenza ω e massa m. Quindi la particella è descritta dalla Hamiltoniana $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$. Al tempo $t=0$ il sistema è preparato nello stato

$$|\Psi\rangle = C\left(e^{-\frac{\gamma^2}{2}}|0\rangle - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\gamma^2}{2}}\frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\right), \qquad (1)$$

con γ una costante reale. I kets $|n\rangle$, $n \geq 0$, sono gli autokets di $\hat{H}$ con autovalore $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$.
i. Trovare la costante C in modo che lo stato $|\Psi\rangle$ sia normalizzato a uno.
ii. Se al tempo $t=0$ viene accesa la debole perturbazione $\lambda\hat{P}(t)$ con $\lambda \ll 1$ e $\hat{P}(t) = \hat{x}\sin(\omega t)$, qual'è la probabilità che al tempo $t = \pi/\omega$ una misura dell'energia fornisca il valore $\hbar\omega/2$? Si determini il risultato all'ordine più basso in λ.

Soluzione Problema 1

i. Gli autovalori E_n della Hamiltoniana sono gli stessi di una singola buca a pareti infinite in quanto le autofunzioni sono quelle della singola buca di destra, indichiamole con $\varphi_n^{(+)}(x)$, o della singola buca di sinistra, indichiamole con $\varphi_n^{(-)}(x)$. Quindi $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$ con $n = 1, 2, , \ldots$ e

$$\varphi_n^{(+)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi(x-b)}{a} & b < x < b+a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \varphi_n^{(-)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi(x+b)}{a} & -b > x > -b-a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ii. Dal punto i. segue che la degenerazione di ciascun autovalore E_n è pari a 2.
iii. La risposta è si. Infatti una qualsiasi combinazione lineare delle autofunzioni con $n = 1$, ossia $\psi(x) = \alpha\varphi_1^{(+)}(x) + \beta\varphi_1^{(-)}(x)$ ha energia $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$. Se la particella è descritta dalla funzione d'onda $\psi(x)$ la probabilità di trovarla nella buca di destra è pari a

$$P = \int_b^{b+a} dx |\psi(x)|^2 = |\alpha|^2 \int_b^{b+a} dx |\varphi_1^{(+)}(x)|^2 = |\alpha|^2.$$

Basterà quindi scegliere α tale che $|\alpha| = 1/3$.

Soluzione Problema 2

Indichiamo con $|n, j, m_j\rangle$ gli autokets di numero quantico principale n che sono autokets del quadrato del momento angolare totale con autovalore $\hbar^2 j(j+1)$ e della componente z del momento angolare totale con autovalore $\hbar m_j$. Dalla teoria della composizione del momento angolare abbiamo

$$\begin{array}{lcl} |1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |1, 0, 0; +\rangle & & |1, 0, 0; +\rangle = |1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|2, 1, 1; -\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1, 0; +\rangle & \Rightarrow & |2, 1, 0; +\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ |2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 1, 1; -\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|2, 1, 0; +\rangle & & |2, 1, 1; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \end{array}$$

Pertanto lo stato $|\Psi\rangle$ può anche scriversi come

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 + i\sqrt{2})|2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{2} - i)|2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$$

i. La probabilità richiesta è data dalla somma della probabilità di trovare la particella nello stato $|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ o nello stato $|2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$. Quindi $P = 3/4$.
ii. Indicando con $E_n = -\frac{e^2}{2n^2 a_\mathrm{B}}$ gli autovalori della Hamiltoniana avremo $\langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle = -\frac{e^2}{2a_\mathrm{B}}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}) = -\frac{5e^2}{16a_\mathrm{B}}$
iii. Utilizzando l'ortonormalità delle armoniche sferiche avremo

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\hat{r}|\Psi\rangle &= \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{1}{2}\Big(R_{1,0}^2(r) + R_{2,1}^2(r)\Big) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dr\, r^3 \Big(\frac{4}{a_\mathrm{B}^3}e^{-2r/a_\mathrm{B}} + \frac{1}{24a_\mathrm{B}^3}\frac{r^2}{a_\mathrm{B}^2}e^{-r/a_\mathrm{B}}\Big) \\ &= \frac{a_\mathrm{B}}{2}\int dx \Big(\frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{24}\Big)e^{-x} = \frac{a_\mathrm{B}}{2}\Big(\frac{3!}{4} + \frac{5!}{24}\Big) = \frac{13}{4}a_\mathrm{B} \end{aligned} \tag{2}$$

Soluzione Problema 3

i. Lo stato $|\Psi\rangle = e^{-\frac{\gamma^2}{2}}|0\rangle - |\gamma\rangle$ con $|\gamma\rangle$ stato coerente normalizzato a uno. Tenendo conto che γ è reale avremo $\langle\Psi|\Psi\rangle = e^{-\gamma^2} + 1 - 2e^{-\gamma^2} = 1 - e^{-\gamma^2}$
ii. Bisogna calcolare la probabilità che ad un generico tempo $t > 0$ il sistema sia nello stato fondamentale dell'oscillatore armonico. In base alla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, tale probabilità si ottiene calcolando il modulo quadro del coefficiente

$$c_0(t) = c_0(0) - \frac{i\lambda}{\hbar}\sum_{n=0}^\infty \int_0^t dt' \langle 0|\hat{x}\sin(\omega t')|n\rangle e^{i\frac{E_0 - E_n}{\hbar}t'} c_n(0),$$

dove $c_0(0) = 0$, $c_n(0) = -\frac{e^{-\frac{\gamma^2}{2}}}{\sqrt{1-e^{-\gamma^2}}}\frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}}$ per $n > 0$ e $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Ricordando che $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ si vede immediatamente che nella somma sopravvive solo il termine relativo a $n = 1$ e pertanto

$$c_0(t) = \frac{i\lambda}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{e^{-\frac{\gamma^2}{2}}}{\sqrt{1-e^{-\gamma^2}}}\gamma\int_0^t dt' \sin(\omega t')e^{-i\omega t'} = \frac{e^{-\frac{\gamma^2}{2}}}{\sqrt{1-e^{-\gamma^2}}}\frac{i\lambda\gamma}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\frac{1-e^{-2i\omega t}-2i\omega t}{4\omega}.$$

La probabilità richiesta è data da

$$P = |c_0(\pi/\omega)|^2 = \frac{e^{-\gamma^2}}{1-e^{-\gamma^2}}\frac{\lambda^2\pi^2\gamma^2}{8m\hbar\omega^3}$$

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 14.06.2021

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Gabriele Anselmi	2	8	5	15
Valeria Battistelli	2	0	2	4
Andrea Calligari	10	3	5	18
Giorgia Luparelli	1	1	7	9
Manuela Montalto	2	1	1	4

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.