Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 15 Giugno 2020, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Si consideri un sistema quantistico a due livelli. In una certa base la rappresentazione di tre operatori $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ è la seguente

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Sapendo che
i) La probabilità che una misura dell'osservabile A fornisca il valore -1 vale $\frac{1}{2}$, ossia $P(A = -1) = \frac{1}{2}$
ii) La probabilità che una misura dell'osservabile B fornisca il valore 1 vale $\frac{5}{6}$, ossia $P(B = 1) = \frac{5}{6}$
iii) Il valore medio dell'osservabile C vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$
Determinare il vettore a due componenti che rappresenta lo stato del sistema nella base data.

Problema 2

Si consideri una particella di massa m in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -a\delta(x-b) & x > 0 \end{cases}$$

con $a > 0$ e $b > 0$. Fissato il valore di a si chiede
1) Determinare per quali valori di b esiste almeno uno stato legato.
2) Possono esservi due o più stati legati?

Problema 3

Siano $|n\rangle$ e $\langle n|$ rispettivamente gli auto-ket e gli auto-bra dell'Hamiltoniano dell'oscillatore armonico unidimensionale con autovalori $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, e si consideri l'Hamiltoniano $\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |n\rangle\langle n| + \sqrt{2}\hbar\omega(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$.

1) Determinare gli autostati di $\hat{H}$ e le rispettive energie;

2) Se il sistema è soggetto alla perturbazione $\hat{P} = \hbar\eta(|0\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 0|)$ con $\eta \ll \omega$, determinare come si modificano le energie al primo ordine in teoria delle perturbazioni;

Soluzione Problema 1

La matrice $\mathbb{A}$ ha autovalori $a_1 = 5$ e $a_2 = -1$. I corrispondenti autovettori normalizzati sono

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dal punto i) deduciamo che il vettore che descrive il sistema deve avere la seguente struttura

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{a}_1 + e^{i\phi} \mathbf{a}_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} e^{i\phi} \\ \sqrt{2} - e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

dove la fase ϕ va determinata sfruttando i punti ii) e iii). Dal punto ii) avremo

$$P(B = -1) = |(1,0) \cdot \mathbf{v}|^2 = \frac{1}{6} \left| (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} e^{i\phi} \\ \sqrt{2} - e^{i\phi} \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos\phi = \frac{5}{6}$$

da cui si evince che $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi che $\phi = \pm\frac{\pi}{4}$. Per determinare il segno di ϕ utilizziamo l'ultimo punto. Il valore di aspettazione dell'osservabile C è dato da

$$\mathbf{v}^\dagger \mathbb{C} \mathbf{v} = \frac{1}{6} (1 + \sqrt{2} e^{-i\phi}, \sqrt{2} - e^{-i\phi}) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} e^{i\phi} \\ \sqrt{2} - e^{i\phi} \end{pmatrix} = -\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pertanto $\phi = -\frac{\pi}{4}$.

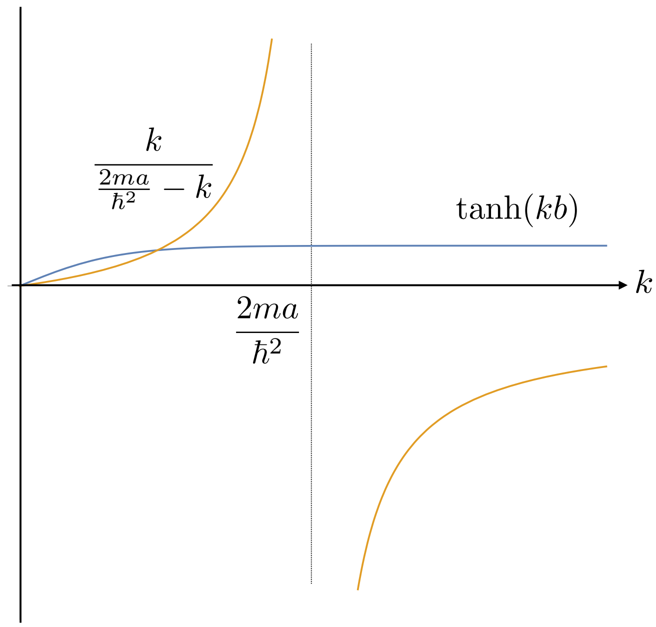
Soluzione Problema 2

Il valore del potenziale per $x \to \infty$ è zero mentre per $x \to -\infty$ è ∞; pertanto dobbiamo cercare autofunzioni di energia minore di zero. Data la struttura del potenziale la generica autofunzione di energia E minore di zero può scriversi come

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ae^{kx} + Be^{-kx} & 0 < x < b \\ Ce^{-kx} & x > b \end{cases}$$

dove $k = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} > 0$. Imponendo la condizione di continuità in $x = 0$ si trova immediatamente $A = -B$. Imponendo la condizione di continuità in $x = b$ si trova $A(e^{2kb} - 1) = C$. Imponendo infine la condizione sulla discontinuità della derivata prima in $x = b$ si trova $-Ck - Ak(e^{2kb} + 1) = -\frac{2ma}{\hbar^2} C$. Sostituento in quest'ultima equazione il valore di C ottenuto precedentemente si trova l'equazione

$$\frac{k}{\frac{2ma}{\hbar^2} - k} = \tanh(kb)$$



Come si evince dal grafico affinchè esista un k per cui le due funzioni possano essere uguali la derivata prima in $k=0$ della funzione a sinistra deve essere minore della derivata prima in $k=0$ della funzione a destra dell'uguale. Questo ci conduce alla condizione cercata

$$\frac{d}{dk}\left.\frac{k}{\frac{2ma}{\hbar^2}-k}\right|_{k=0}=\frac{\hbar^2}{2ma}<\frac{d}{dk}\tanh(kb)|_{k=0}=b$$

Quindi se la delta è troppo vicina alla barriera non vi è alcuno stato legato. Inoltre dalla soluzione grafica si evince che non può esservi più di uno stato legato.

Soluzione Problema 3

1) $\hat{H}$ può essere riscritto come $\hat{H}=\sum_{n=2}^{\infty}\varepsilon_n|n\rangle\langle n|+\frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle\langle 0|+\frac{3\hbar\omega}{2}|1\rangle\langle 1|+\sqrt{2}\hbar\omega(|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)$. Dunque è evidente che i ket $|n\rangle$ con $n\geq 2$ sono autoket di $\hat{H}$ con autovalori ε_n uguali a quelli dell'oscillatore armonico normale. Invece i ket $|0\rangle$ e $|1\rangle$ non sono più autokets in quanto vengono mescolati tra loro. Nel sottospazio generato dalla base $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ l'Hamiltoniano è rappresentato dalla matrice 2×2

$$\hbar\omega\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix} \tag{1}$$

i cui autovalori sono $\varepsilon_-=-\frac{\hbar\omega}{2}$ (che essendo la più bassa è l'energia dello stato fondamentale) e $\varepsilon_+=\frac{5\hbar\omega}{2}$. Notiamo che l'autovalore $\frac{5\hbar\omega}{2}$ risulta due volte degenere, dato che $\varepsilon_+=\varepsilon_2$. I rispettivi autovettori normalizzati sono invece

$$\vec{\varphi}_-=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad \vec{\varphi}_+=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dunque gli autoket risultano $|\varphi_-\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle+\sqrt{2}|1\rangle)$ e $|\varphi_+\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}|0\rangle+|1\rangle)$.

2) Su tutti gli stati non degeneri la perturbazione al primo ordine non ha effetto, dato che $\langle n|\hat{P}|n\rangle=\langle\varphi_-|\hat{P}|\varphi_-\rangle=0$. Sui due stati degeneri $|\varphi_+\rangle$ e $|2\rangle$ gli elementi di matrice di $\hat{P}$ invece non sono nulli:

$$\begin{pmatrix}\langle\varphi_+|\hat{P}|\varphi_+\rangle & \langle\varphi_+|\hat{P}|2\rangle\\ \langle 2|\hat{P}|\varphi_+\rangle & \langle 2|\hat{P}|2\rangle\end{pmatrix}=\hbar\eta\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0\end{pmatrix} \tag{3}$$

Gli autovalori di questa matrice sono $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\eta$. Dunque la perturbazione rimuove la degenerazione e le energie corrette al primo ordine sono

$$\frac{5}{2}\hbar\omega - \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\eta \quad \text{e} \quad \frac{5}{2}\hbar\omega + \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\eta \tag{4}$$

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 15.06.2020

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Valeria Battistelli	5	2	2	9
Gian Maria Belardi	1	6	1	8
Luca Ferretti	8	2	1	11
Noemi Labbate	6	9	5	20
Giorgia Luparelli	1	2	1	4
Manuela Montalto	5	2	6	13
Davide Rinaldi	4	9	8	21
Andrea Sagripanti	0	3	6	9

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.