Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 18 Febbraio 2020, tempo disponibile 2 ore e mezzo

---

Problema 1

Si consideri la Hamiltoniana dell'oscillatore armonico quantistico $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$ e siano $|n\rangle$ gli autostati di $a^\dagger a$:

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle, \qquad n = 0, 1, \ldots, \infty.$$

a) Quali tra i seguenti 6 operatori è hermitiano?

$$A = (a^\dagger)^3 a^3, \quad B = (a^\dagger)^2 a^2 a^\dagger a, \quad C = (a^\dagger)^2 (\frac{a^\dagger + a}{i}) a^2, \quad D = (a^\dagger)^2 (\frac{a^\dagger - a}{i}) a^2, \quad F = (a^\dagger a)^3, \quad G = a^\dagger a (a^\dagger - a) a^\dagger a,$$

b) Tra gli operatori hermitiani, quali hanno come autostati gli stati $|n\rangle$?
c) Per gli operatori identificati nel punto b) determinare tutti i possibili autovalori e la loro degenerazione
d) Nel caso di autovalori degeneri, determinare se e come la degenerazione viene rimossa dalla piccola perturbazione $V = \lambda[a^2 + (a^\dagger)^2]$

Problema 2

Si consideri una particella di massa m in una dimensione soggetta al potenziale $V(x) = 0$ se $x \in (0, L)$ e $V(x) = \infty$ altrimenti (buca di potenziale a pareti infinite). Indichiamo con $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi x}{L})$ le autofunzioni dell'Hamiltoniana. La particella viene inizialmente preparata nello stato $\psi(x) = C[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)]$ dove C è una costante reale positiva.
a) Determinare C in modo che $\psi(x)$ sia normalizzata a 1
b) Determinare la funzione d'onda $\psi(x, t)$ al tempo t
d) Indicando con $P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ la densità di probabilità al tempo t e con $J(x, t) = \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}[\psi^*(x, t) \frac{d}{dx} \psi(x, t)]$ la densità di corrente al tempo t verificare che la $\psi(x, t)$ calcolata nel punto b) soddisfa l'equazione di continuità $\frac{dP}{dt} + \frac{dJ}{dx} = 0$.

Problema 3

Sia dato un sistema di due particelle, una di spin $S_1 = 1$ e una di spin $S_2 = 1/2$, descritto dall'Hamiltoniana $H = \frac{\alpha}{\hbar}(S_{1,z} + S_{2,z})$. Questo sistema viene indagato sperimentalmente e vengono estratte le seguenti informazioni
1) Al tempo $t = 0$ una misura del quadrato dello spin totale $S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$ fornisce il valore $(3/4)\hbar^2$ con probabilità 1/3
2) Al tempo $t = 0$ una misura dello spin totale lungo l'asse z, ossia $S_z = S_{1,z} + S_{2,z}$, fornisce il valore $(3/2)\hbar$ con probabilità 2/3.
3) Al tempo $t = 0$ la media dello spin totale lungo l'asse z è pari a $(5/6)\hbar$
4) Al tempo $t = \pi\hbar/(2\alpha)$ la media dello spin della particella 1 lungo l'asse x, ossia $S_{1,x}$, è pari a $-\hbar\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Determinare lo stato normalizzato del sistema al tempo $t = 0$.

Soluzione Problema 1

a) Gli unici operatori hermitiani sono A, D e F.

b) Affinchè $|n\rangle$ possa essere un autostato, gli operatori devono essere prodotti (o somme di prodotti) con lo stesso numero di operatori a e $a^\dagger$. Quindi solo A e F hanno come autostati gli stati $|n\rangle$.

c) Per calcolare gli autovalori basta applicare gli operatori agli stati $|n\rangle$. Risulta $A|n\rangle = n(n-1)(n-2)|n\rangle$: quindi A ammette autovalore 0 con degenerazione 3 e autovalori $n(n-1)(n-2)$, con $n \geq 3$, la cui degenerazione è uno. Risulta poi $F|n\rangle = n^3|n\rangle$: quindi F ammette autovalori n^3, con $n \geq 0$, la cui degenerazione è uno.

d) Poichè l'unico autovalore degenere sia ha per l'operatore A e gli stati degeneri sono $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$ dobbiamo calcolare la matrice V di elementi $V_{mn} = \lambda\langle m|a^2 + (a^\dagger)^2|n\rangle$ con $m, n = 0, 1, 2$. È facile ottenere

$$V = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

i cui autovalori $v_1 = -\lambda\sqrt{2}$, $v_2 = 0$ e $v_3 = \lambda\sqrt{2}$ forniscono le correzioni cercate.

Soluzione Problema 2

a) Poichè le autofunzioni φ_n sono ortonormali $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) L'autovalore di φ_n è $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, pertanto la funzione d'onda al tempo t è $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x) + ie^{-i\omega t}\varphi_2(x)\right)$ dove $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar = \frac{3\pi^2\hbar}{2mL^2}$

c) La densità di probabilità è $P(x,t) = \frac{1}{2}\left(|\varphi_1(x)|^2 + |\varphi_2(x)|^2 + 2\varphi_1(x)\varphi_2(x)\sin(\omega t)\right)$ e quindi la sua derivata temporale è semplicemente

$$\frac{d}{dt}P(x,t) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\omega\cos(\omega t) = \frac{3\pi^2\hbar}{mL^3}\sin(\frac{\pi x}{L})\sin(\frac{2\pi x}{L})\cos(\omega t).$$

Per calcolare la densità di corrente valutiamo prima $\frac{d}{dx}\psi(x,t) = \frac{\pi}{L\sqrt{L}}\left(\cos(\frac{\pi x}{L}) + 2ie^{-i\omega t}\cos(\frac{2\pi x}{L})\right)$. Quindi

$$\begin{aligned} J(x,t) &= \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left[\psi^*(x,t)\frac{d}{dx}\psi(x,t)\right] = \frac{\pi\hbar}{mL^2}\mathrm{Im}\left[-ie^{i\omega t}\sin(\frac{2\pi x}{L})\cos(\frac{\pi x}{L}) + 2ie^{-i\omega t}\sin(\frac{\pi x}{L})\cos(\frac{2\pi x}{L})\right] \\ &= -\frac{\pi\hbar}{mL^2}\left(\sin(\frac{2\pi x}{L})\cos(\frac{\pi x}{L}) - 2\sin(\frac{\pi x}{L})\cos(\frac{2\pi x}{L})\right)\cos(\omega t) \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\frac{d}{dx}J(x,t) = -\frac{3\pi^2\hbar}{mL^3}\sin(\frac{\pi x}{L})\sin(\frac{2\pi x}{L})\cos(\omega t),$$

e pertanto l'equazione di continuità è soddisfatta.

Soluzione Problema 3

Indichiamo con $|j,m\rangle$ gli autostati dello spin totale. Allora lo stato più generale al tempo $t = 0$ è

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-3/2}^{3/2}\alpha_m|\frac{3}{2},m\rangle + \sum_{m=-1/2}^{1/2}\beta_m|\frac{1}{2},m\rangle$$

Dall'informazione 1) ricaviamo $\sum_{m=-1/2}^{1/2}|\beta_m|^2 = 1/3$. Questo vincolo possiamo convenientemente scriverlo come $\beta_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\phi_1}\sin\theta$ e $\beta_{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\phi_2}\cos\theta$ dove gli angoli ϕ_1, ϕ_2 e θ sono ancora da determinare. Dall'informazione 2) si ricava $|\alpha_{3/2}|^2 = 2/3$ e poichè $\sum_{m=-3/2}^{3/2}|\alpha_m|^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ne concludiamo che $\alpha_{1/2} = \alpha_{-1/2} = \alpha_{-3/2} = 0$. Quindi lo stato al tempo $t = 0$ ha la forma $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\ |\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{i\phi_1}\sin\theta|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + e^{i\phi_2}\cos\theta|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\right)$. Dall'informazione

3) ricaviamo $\langle\psi|S_z|\psi\rangle = \hbar(1+\frac{1}{6}\sin^2\theta - \frac{1}{6}\cos^2\theta) = \frac{5}{6}\hbar$ da cui segue $\cos\theta = 1$ e $\sin\theta = 0$. Siamo arrivati a dover determinare solo la fase ϕ_2. Data la forma dell'Hamiltoniana, lo stato al tempo t è $|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\frac{3i\alpha t}{2\hbar}}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\phi_2}e^{\frac{i\alpha t}{2\hbar}}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$. Scrivendo $S_{1,x} = \frac{1}{2}(S_{1,+}+S_{1,-})$ e tenendo conto che $|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle)$ si trova facilmente $S_{1,+}|\psi(t)\rangle = \hbar\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\phi_2}e^{\frac{i\alpha t}{2\hbar}}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$. Pertanto

$$\langle\psi(t)|S_{1,x}|\psi(t)\rangle = \mathrm{Re}\langle\psi(t)|S_{1,+}|\psi(t)\rangle = \hbar\frac{2}{3\sqrt{3}}\cos(\phi_2 + \frac{2\alpha t}{\hbar}).$$

Al tempo $t = \pi\hbar/(2\alpha)$ questo valore di aspettazione vale $-\hbar\frac{2}{3\sqrt{3}}$, e pertanto deve essere $\phi_2 = 0$. In conclusione lo stato cercato è $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$.

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 18.02.2020

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Gabriele Bassotti	6.5	5	2	13.5
Gian Maria Belardi	3	3	2	8
Elena Campagna	1	6	3	10
Riccardo Plebani	7.5	10	2	19.5

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.