Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 18 Febbraio 2021, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Sia dato un sistema di due particelle, una di spin $S_1 = 1$ e una di spin $S_2 = 1/2$. Questo sistema viene indagato sperimentalmente e vengono estratte le seguenti informazioni

1) Una misura del quadrato dello spin totale $S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)$ fornisce il valore $(3/4)\hbar^2$ con probabilità 1/3
2) Una misura dello spin totale lungo l'asse z, ossia $S_z = S_{1,z} + S_{2,z}$, fornisce il valore $(3/2)\hbar$ con probabilità 2/3.
3) La media dello spin totale lungo l'asse z è pari a $(5/6)\hbar$
4) La media dell'operatore $\hat{S}^2_{1,-}$ è pari a $\frac{4\hbar^2}{3\sqrt{3}}i$

Determinare lo stato normalizzato del sistema.

Problema 2

Per due generici operatori hermitiani $\hat{A}$ e $\hat{B}$ il principio di indeterminazione di Heisenberg stabilisce che $\langle \hat{\sigma}^2_A \rangle \langle \hat{\sigma}^2_B \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2$. Verificare questo principio nel caso in cui $\hat{A} = \hat{L}_x$, $\hat{B} = \hat{L}_y$ e lo stato del sistema è $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle + |1,-1\rangle)$. Si ricordi che $\hat{L}_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|l, m \pm 1\rangle$.

Problema 3

Una particella di spin 1/2, massa m e carica e è descritta dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}} + \frac{\hat{L}^2}{2I}$$

dove $I = \frac{72}{5} \frac{\hbar^4}{me^4}$.
i. Determinare i primi 3 livelli di $\hat{H}$ e la loro degenerazione.
ii. Determinare come la degenerazione dei primi 3 livelli viene rimossa dalla perturbazione $\hat{P} = \alpha \hat{L}_z$.
iii. Determinare come la degenerazione dei primi 3 livelli viene rimossa dalla perturbazione $\hat{P} = \beta \hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}$

(Si ricordi che gli autovalori della Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno sono $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$)

Soluzione Problema 1

Indichiamo con $|j,m\rangle$ gli autostati dello spin totale. Allora lo stato più generale è

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-3/2}^{3/2} \alpha_m |\frac{3}{2}, m\rangle + \sum_{m=-1/2}^{1/2} \beta_m |\frac{1}{2}, m\rangle$$

Dall'informazione 1) ricaviamo $\sum_{m=-1/2}^{1/2} |\beta_m|^2 = 1/3$. Questo vincolo possiamo convenientemente scriverlo come $\beta_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\phi_1} \sin\theta$ e $\beta_{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\phi_2} \cos\theta$ dove gli angoli ϕ_1, ϕ_2 e θ sono ancora da determinare. Dall'informazione 2) si ricava $|\alpha_{3/2}|^2 = 2/3$ e poichè $\sum_{m=-3/2}^{3/2} |\alpha_m|^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ne concludiamo che $\alpha_{1/2} = \alpha_{-1/2} = \alpha_{-3/2} = 0$. Quindi lo stato cercato ha la forma $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(e^{i\phi_1} \sin\theta |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + e^{i\phi_2} \cos\theta |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \right)$. Dall'informazione 3) ricaviamo $\langle\psi|\hat{S}_z|\psi\rangle = \hbar(1 + \frac{1}{6}\sin^2\theta - \frac{1}{6}\cos^2\theta) = \frac{5}{6}\hbar$ da cui segue $\cos\theta = 1$ e $\sin\theta = 0$. Siamo arrivati a dover determinare solo la fase ϕ_2. Tenendo conto del fatto che $|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |1,1\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ e che $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ è immediato trovare $\hat{S}^2_{1,-}|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} 2\hbar^2 |1,-1\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ e pertanto $\langle\psi|\hat{S}^2_{1,-}|\psi\rangle = -\frac{e^{-i\phi_2}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2}{3}} 2\hbar^2 = -\frac{4\hbar^2}{3\sqrt{3}} e^{-i\phi_2}$. Dovendo questa media essere uguale a $\frac{4\hbar^2}{3\sqrt{3}} i$ ne deduciamo che $\phi_2 = \pi/2$. In conclusione $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\, |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

Soluzione Problema 2

Risulta $\hat{L}_x = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-)$ e $\hat{L}_y = \frac{1}{2i}(\hat{L}_+ - \hat{L}_-)$. Quindi $\hat{L}_x|\psi\rangle = \hbar|1,0\rangle$ e $\hat{L}_y|\psi\rangle = |\emptyset\rangle$. Da quest'ultima identità se ne ricava che $\langle\hat{L}_y\rangle = \langle\hat{L}_y^2\rangle = 0$ e quindi $\langle\hat{\sigma}^2_{L_x}\rangle\langle\hat{\sigma}^2_{L_y}\rangle = 0$. Inoltre $\langle[\hat{L}_x, \hat{L}_y]\rangle = \langle\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x\rangle = 0$. Essendo $0 \geq 0$ il principio di Heisenberg è soddisfatto.

Soluzione Problema 3

i. L'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno $\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}}$ e del rotatore quantistico isotropo $\frac{\hat{L}^2}{2I}$ commutano, e possiamo considerarle entrambe diagonali sulla base $|n,l,m;\frac{1}{2}m_s\rangle$. Pertanto gli autovalori di $\hat{H}$ risultano $E_{nl} = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$ con $l = 1, 2 \ldots n-1$. Dunque i primi tre livelli risultano

$$E_{10} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \equiv E_1 \qquad \text{degenerazione} \quad 2$$
$$E_{20} = -\frac{me^4}{8\hbar^2} \equiv E_2 \qquad \text{degenerazione} \quad 2$$
$$E_{21} = E_{30} = -\frac{me^4}{18\hbar^2} \equiv E_3 \qquad \text{degenerazione} \quad 8$$

ii. La perturbazione $\alpha\hat{L}_z$ è diagonale sulla base degli autostati di $\hat{H}$. E' immediato verificare che tale perturbazione non rimuove la degenerazione 2 di E_1 e E_2, mentre rimuove quella del secondo stato eccitato E_3. In particolare abbiamo

$$E_3 \;\rightarrow\; E_3 - \alpha\hbar \quad \text{per} \quad |2,1,-1;\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle \quad \text{degenerazione} \quad 2$$
$$E_3 \;\rightarrow\; E_3 \quad \text{per} \quad |2,1,0;\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle \quad \text{e} \quad |3,0,0;\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle \quad \text{degenerazione} \quad 4$$
$$E_3 \;\rightarrow\; E_3 + \alpha\hbar \quad \text{per} \quad |2,1,1;\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle \quad \text{degenerazione} \quad 2$$

iii. La perturbazione $\beta\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ non rimuove la degenerazione 2 di E_1 e E_2 dato che i rispettivi stati hanno $l = 0$. Per quanto riguarda il livello E_3, invece esso si splitta in tre sottolivelli. In particolare i 2 stati $|3,0,0;\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle$ dell'ottetto non vengono toccati dalla perturbazione dato che hanno anch'essi $l = 0$. Invece la perturbazione non è diagonale sui rimanenti 6 stati con $l = 1$ $|2,1,m;\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle$ (dove $m = -1, 0, 1$). Per diagonalizzarla conviene passare alla base degli autostati del momento angolare totale, $|2,\frac{1}{2},m_j\rangle_{1\frac{1}{2}}$ ($m_j = \pm 1/2$) e $|2,\frac{3}{2},m_j\rangle_{1\frac{1}{2}}$ ($m_j = -3/2,-1/2,1/2,3/2$). Pertanto

$$E_3 \to E_3 \quad \text{per} \quad |3,0,0;\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\rangle \quad \text{degenerazione} \quad 2$$

$$E_3 \to E_3 - \beta\hbar^2 \quad \text{per} \quad |2,\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle_{1\frac{1}{2}} \quad \text{degenerazione} \quad 2$$

$$E_3 \to E_3 + \frac{\beta\hbar^2}{2} \quad \text{per} \quad |2,\frac{3}{2},m_j\rangle_{1\frac{1}{2}} \quad \text{con} \quad m_j = -3/2,-1/2,1/2,3/2 \quad \text{degenerazione} \quad 4$$

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 18.02.2021

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Valeria Battistelli	1	10	2	13
Manuela Montalto	1	1	1	3
Elena Clara Maria Rossetti	4	8	8	20
Andrea Sagripanti	4	6	8	18

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.