Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 25 Settembre 2020, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Si consideri una particella di massa m in una dimensione soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } |x| > L/2 \\ \frac{2\hbar^2}{ma}\delta(x) & \text{se } |x| < L/2 \end{cases}$$

Essendo il potenziale pari le autofunzioni saranno o pari o dispari e nell'intervallo $(-L/2, L/2)$ avranno la forma

$$\text{DISPARI}: \quad \psi(x) = A \begin{cases} \sin k(x + L/2) & , \quad x < 0 \\ \sin k(x - L/2) & , \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{PARI}: \quad \psi(x) = A \begin{cases} \sin k(x + L/2) & , \quad x < 0 \\ -\sin k(x - L/2) & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Determinare i possibili valori di k sia nel caso pari che nel caso dispari.

Problema 2

Si consideri un elettrone nello stato fondamentale di un atomo di idrogeno. Tra il tempo $t = 0$ e il tempo $t = T$ viene accesa la perturbazione dipendente dal tempo e dalla coordinata radiale

$$\lambda P(r, t) = \lambda \, \frac{\sqrt{2}\,\hbar\, a_{\rm B}}{T} \, \exp\big[\big(\frac{3}{2} v - i \frac{3e^2}{8\hbar}\big) \frac{t}{a_{\rm B}} \big] \, \delta(r - vt)$$

dove $a_{\rm B}$ è il raggio di Bohr e $v > 0$ è una costante con le dimensioni fisiche di una velocità. Trascurando i gradi di libertà di spin calcolare le probabilità al tempo $t = T$ di trovare l'elettrone in uno degli autostati con numero quantico principale $n = 2$. Per quale valore di v tale probabilità è minima?

Si ricorda che le energie dell'atomo di idrogeno sono $E_n = -\frac{e^2}{2a_{\rm B} n^2}$ e che le funzioni radiali dell'atomo di idrogeno per $n = 1$ e $n = 2$ sono

$$R_{1,0}(r) = 2 \left(\frac{1}{a_{\rm B}} \right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a_{\rm B}}}, \qquad R_{2,0}(r) = \left(\frac{1}{2a_{\rm B}} \right)^{3/2} e^{-\frac{r}{2a_{\rm B}}} \left(2 - \frac{r}{a_{\rm B}} \right), \qquad R_{2,1}(r) = \left(\frac{1}{2a_{\rm B}} \right)^{3/2} e^{-\frac{r}{2a_{\rm B}}} \frac{r}{\sqrt{3}\, a_{\rm B}}$$

Problema 3

Un sistema quantistico a 3 livelli si trova al tempo $t = 0$ nello stato $|\psi\rangle$ che, in una certa base, è rappresentato dal vettore $\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il sistema inizia ad evolvere secondo l'equazione di Schrödinger con una Hamiltoniana $\hat{H}(t)$ che, nella stessa base, è rappresentata dalla matrice

$$\mathbb{H}(t) = E_0 \left[\theta(t)\mathbb{A} - \theta(t - T) \sin(\frac{\pi}{2}\mathbb{A}) \right] \qquad \text{con} \qquad \mathbb{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Assumendo $T > 0$

i. Determinare autovettori e autovalori di $\mathbb{H}(t)$ per i tempi $0 < t < T$ e per i tempi $T < t$.

ii. Determinare il vettore evoluto $\boldsymbol{\psi}(t)$ per tutti i tempi $t > 0$

iii. Calcolare il valore medio dell'energia $\boldsymbol{\psi}^\dagger(t)\mathbb{H}(t)\boldsymbol{\psi}(t)$ per tutti i tempi $t > 0$.

iv. Determinare come evolve nel tempo la probabilità $P(t)$ che una misura dell'energia dia risultato nullo.

Soluzione Problema 1

Nel caso dispari la condizione di continuità in $x = 0$ è soddisfatta per $k = 2n\pi/L$ e, per tali valori di k, la condizione di discontinuità della derivata prima è automaticamente soddisfatta. Una possibile scelta di n per ottenere autofunzioni indipendenti è $n = 1, 2, 3, \dots$

Nel caso pari la condizione di continuità in $x = 0$ è sempre soddisfatta. Invece la condizione di discontinuità della derivata prima conduce a

$$\tan\frac{kL}{2} = -\frac{ka}{2}$$

In questo caso autofunzioni indipendenti si ottengono prendendo ad esempio tutte le soluzioni con k positivo dell'equazioni qui sopra.

Soluzione Problema 2

Poichè la perturbazione non dipende dalle variabili angolari la probabilità di trovare l'elettrone negli stati con $n = 2$ e momento angolare $l = 1$ è nulla (ortonormalità delle armoniche sferiche). Per conoscere la probabilità di trovare l'elettrone con $n = 2$ e $l = 0$ occorre calcolare

$$\begin{aligned}
c_{2,0} &= -\frac{i\lambda}{\hbar}\int_0^T dt' \int_0^\infty dr\, r^2 R_{1,0}(r) R_{2,0}(r) P(r,t') e^{i(E_2-E_1)t'/\hbar} \\
&= -\frac{i\lambda}{\hbar}\, 2\left(\frac{1}{a_\mathrm{B}}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2a_\mathrm{B}}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{2}\,\hbar\, a_\mathrm{B}}{T}\int_0^T dt' \int_0^\infty dr\, r^2 e^{-\frac{3}{2}\frac{r}{a_\mathrm{B}}}\left(2-\frac{r}{a_\mathrm{B}}\right) e^{\left(\frac{3}{2}v - i\frac{3e^2}{8\hbar}\right)\frac{t'}{a_\mathrm{B}}} e^{i\frac{3e^2 t'}{8a_\mathrm{B}\hbar}}\,\delta(r-vt') \\
&= -i\frac{\lambda}{a_\mathrm{B}^2 T}\int_0^T dt' (vt')^2\left(2-\frac{vt'}{a_\mathrm{B}}\right) \\
&= -i\lambda\left(\frac{vT}{a_\mathrm{B}}\right)^2\left(\frac{2}{3}-\frac{vT}{4a_\mathrm{B}}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

La probabilità richiesta è $P_{2,0} = |c_{2,0}|^2 = \lambda^2\left(\frac{vT}{a_\mathrm{B}}\right)^4\left(\frac{2}{3}-\frac{vT}{4a_\mathrm{B}}\right)^2$. Il valore minimo è zero e si ha per $v = \frac{8a_\mathrm{B}}{3T}$.

Soluzione Problema 3

i. Poichè $[\mathbb{H}(t), \mathbb{A}] = 0$ a tutti i tempi gli autovettori di $\mathbb{A}$ sono anche autovettori di $\mathbb{H}(t)$. La diagonalizzazione di $\mathbb{A}$ fornisce immediatamente gli autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ e corrispondenti autovettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ i\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -i\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Dunque gli autovalori di $\underline{H}(t)$ risultano

$$\text{Per}\quad 0<t<T \qquad \begin{cases} E_1 = E_0\lambda_1 = -E_0 \\ E_2 = E_0\lambda_2 = 0 \\ E_3 = E_0\lambda_3 = E_0 \end{cases} \qquad\qquad \text{Per}\quad T<t \qquad \begin{cases} E_1 = E_0[\lambda_1 - \sin(\frac{\pi}{2}\lambda_1)] = 0 \\ E_2 = E_0[\lambda_2 - \sin(\frac{\pi}{2}\lambda_2)] = 0 \\ E_3 = E_0[\lambda_3 - \sin(\frac{\pi}{2}\lambda_3)] = 0 \end{cases}$$

ii. Per determinare l'evoluzione temporale del sistema bisogna esprimere lo stato iniziale $\boldsymbol{\psi}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$. A tal fine è immediato verificare che

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3}{\sqrt{2}},$$

e pertanto l'evoluzione temporale risulta

$$\vec{\psi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{cases} \boldsymbol{v}_1 e^{iE_0 t/\hbar} + \boldsymbol{v}_3 e^{-iE_0 t/\hbar} & \text{per}\quad 0<t<T \\ \boldsymbol{v}_1 e^{iE_0 T/\hbar} + \boldsymbol{v}_3 e^{-iE_0 T/\hbar} & \text{per}\quad t>T \end{cases}$$

iii. Il valor medio dell'energia risulta essere

$$E(t) = \boldsymbol{\psi}^\dagger(t)\mathbb{H}(t)\boldsymbol{\psi}(t) = \frac{1}{2}(E_1 + E_3) = 0$$

per tutti i tempi.

iv. Per determinare la probabilità $P(t)$ che una misura dell'energia dia risultato nullo bisogna calcolare la somma dei moduli quadri dei prodotti scalari tra $\boldsymbol{\psi}(t)$ e *tutti* gli autovettori di $\underline{H}(t)$ che al tempo t hanno autovalore nullo:

$$P(t) = \begin{cases} |\boldsymbol{v}_2^\dagger \boldsymbol{\psi}(t)|^2 = 0 & \text{per} \quad 0 < t < T \\ \\ |\boldsymbol{v}_1^\dagger \boldsymbol{\psi}(t)|^2 + |\boldsymbol{v}_2^\dagger \boldsymbol{\psi}(t)|^2 + |\boldsymbol{v}_3^\dagger \boldsymbol{\psi}(t)|^2 = 1 & \text{per} \quad t > T \end{cases}$$

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 25.09.2020

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Valeria Battistelli	1	1	3.5	5.5
Elena Campagna	8	6	8	22
Luca Ferretti	2	2	1	5
Manuela Montalto	3	2	1	6
Elena Rossetti	3	0	2	5

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.