Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 26 Settembre 2019, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Si consideri una particella quantistica di massa m in una dimensione soggetta al potenziale a gradino $V(x) = V\theta(x)$.
(a) Scrivere le autofunzioni $\psi_E(x)$ di energia $0 \leq E \leq V$ nelle regioni $x \leq 0$ e $x \geq 0$.
(b) Supponete che al tempo $t = 0$ la particella sia descritta dalla funzione d'onda $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{E_1}(x) + \psi_{E_2}(x)]$ con energie $E_1 = V$ e $E_2 = V/2$ (quindi $\psi(x)$ è una combinazione lineare di due autofunzioni del punto precedente). Scrivere la funzione d'onda $\psi(x, t)$ al tempo t nelle regioni $x \leq 0$ e $x \geq 0$.
(c) La corrente di probabilità al generico tempo t è data da $j(x, t) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}[\psi^*(x, t)\frac{d}{dx}\psi(x, t)]$. Calcolare $j(0, t)$ (ossia il valore della corrente in $x = 0$) esprimendo il risultato solo in termini di m e V.

Problema 2

Due particelle di spin 1/2 si trovano nel seguente stato non normalizzato

$$|\psi\rangle = \sqrt{3}i|+\rangle|+\rangle - \sqrt{2}|+\rangle|-\rangle + \sqrt{2}i|-\rangle|+\rangle + (1 + i)|-\rangle|-\rangle$$

dove $|+\rangle$ e $|-\rangle$ sono gli autostati dello spin lungo l'asse z.
(a) Normalizzare lo stato
(b) Calcolare la probabilità che una misura dello spin totale S^2 fornisca $2\hbar^2$ e 0.
(c) Sono possibili altri valori per una misura di S^2?
(d) Calcolare $\langle\psi|S^2|\psi\rangle$

Problema 3

Un sistema quantistico a tre livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare gli autovalori, la loro degenerazione, e una base ortonormale di autovettori
(b) Il sistema è poi soggetto alla perturbazione $H' = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare la correzione degli autovalori al primo ordine in λ e una base ortonormale di autovettori all'ordine zero in λ.

Soluzione Problema 1

(a) Per energie E al di sotto di V la generica funzione d'onda e' data da

$$\psi_E(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & x \leq 0 \\ Te^{-qx} & x \geq 0 \end{cases}$$

con $k^2 = 2mE/\hbar^2$ e $q^2 = 2m(V-E)/\hbar^2$. Imponendo che la funzione d'onda sia continua e con derivata continua si trova $R = -\frac{q+ik}{q-ik}$ e $T = -\frac{2ik}{q-ik}$.

(b) Per $E = E_1 = V$ troviamo $q_1 = 0$ e $k_1^2 = 2mV/\hbar^2$ per cui $R_1 = 1$ e $T_1 = 2$. Per $E = E_2 = V/2$ troviamo $k_2^2 = q_2^2 = mV/\hbar^2$ per cui $R_2 = -\frac{(1+i)}{1-i}$ e $T_2 = -\frac{2i}{1-i}$. La funzione d'onda al tempo t sarà dunque

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{E_1}(x)e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} + \psi_{E_2}(x)e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ik_1x} + e^{-ik_1x}\right)e^{\frac{-iVt}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ik_2x} - \frac{(1+i)}{1-i}e^{-ik_2x}\right)e^{-\frac{iVt}{2\hbar}} & x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}2e^{\frac{-iVt}{\hbar}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2i}{1-i}e^{-q_2x}e^{-\frac{iVt}{2\hbar}} & x \geq 0 \end{cases}$$

(c) Per $x = 0$ possiamo usare l'espressione di $\psi(x,t)$ valida per $x \geq 0$. Avremo allora $\frac{d}{dx}\psi(x,t) = q_2\frac{\sqrt{2}i}{1-i}e^{-q_2x}e^{-\frac{iVt}{2\hbar}}$. Quindi

$$j(0,t) = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left[\sqrt{2}e^{\frac{iVt}{\hbar}}q_2\frac{\sqrt{2}i}{1-i}e^{-\frac{iVt}{2\hbar}}\right] = \frac{\hbar}{m}\sqrt{\frac{mV}{\hbar^2}}\mathrm{Im}\left[(i-1)e^{\frac{iVt}{2\hbar}}\right] = \sqrt{\frac{V}{m}}\left(\cos\frac{Vt}{2\hbar} - \sin\frac{Vt}{2\hbar}\right)$$

Soluzione Problema 2

La norma dello stato è 3. Nella base dello spin totale $|S, M_S\rangle$ to stato normalizzato si scrive come

$$|\psi\rangle = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}i|1,1\rangle - (1-i)|1,0\rangle - (1+i)|0,0\rangle + (1+i)|1,-1\rangle\right)$$

Quindi la probabilità di misurare $2\hbar^2$ è $7/9$ mentre quella di misurare 0 è $2/9$. Pertanto il valor medio $\langle\psi|S^2|\psi\rangle = 14/9\hbar^2$. Nessun altro valore per una misura di S^2 è possibile.

Soluzione Problema 3

(a) L'Hamiltoniana H ha autovalori $E_1 = 1$ con autovettore $\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = 1$ con autovettore $\boldsymbol{\phi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $E_3 = 2$ con autovettore $\boldsymbol{\phi}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Poiché $E_1 = E_2 = 1$ dobbiamo applicare la teoria delle perturbazioni caso degenere. Nel sottospazio degenere avremo

$$\lambda\begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_1^\dagger H'\boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_1^\dagger H'\boldsymbol{\phi}_2 \\ \boldsymbol{\phi}_2^\dagger H'\boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2^\dagger H'\boldsymbol{\phi}_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

che fornisce le correzioni $E_1^{(1)} = 0$, con nuovo autovettore $\boldsymbol{\psi}_1 = -\frac{i}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\phi}_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{\phi}_2$, e $E_2^{(1)} = 3\lambda/2$, con nuovo autovettore $\boldsymbol{\psi}_2 = i\sqrt{\frac{2}{3}}\boldsymbol{\phi}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\phi}_2$. L'autovalore E_3 invece è non degenere e quindi la correzione è semplicemente $E_3^{(1)} = \boldsymbol{\phi}_3^\dagger H'\boldsymbol{\phi}_3 = \lambda/2$ con autovettore invariato $\boldsymbol{\phi}_3$.

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 26.09.2019

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Gian Maria Belardi	2	7	3	12
Elena Campagna	2	7	2	11
Luca Ferretti	0	0	2	2
Elisabetta Loreti	3	6	4	13
Davide Rinaldi	4	8	3	15
Cristiano Ruggieri	4	10	4	18

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.