Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 27 Settembre 2021, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Una particella si trova inizialmente nello stato fondamentale dell'oscillatore armonico quantistico descritto dall'Hamiltoniana $\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$. Al tempo $t = 0$ l'Hamiltoniana cambia improvvisamente e diventa $\hat{H}_2 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - a\delta(x)$ con $a > 0$. Indicando con P la probabilità che al tempo $t > 0$ una misura di $\hat{H}_2$ dia risultato negativo

i. Scrivere P come un integrale in cui compaia esclusivamente il rapporto $\lambda = \frac{\hbar^2}{max_0}$, essendo $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ la lunghezza tipica associata all'oscillatore armonico.

ii. Assumendo che λ sia piccolo calcolare P al terzo ordine in λ.

Problema 2

Una particella di spin $\frac{1}{2}$ e momento angolare orbitale $l = 1$ ruota liberamente intorno all'asse z essendo descritta dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_z^2}{2I}$$

dove $\hat{L}_z$ è la componente z del suo momento angolare orbitale e I è il momento di inerzia della particella. La particella è preparata al tempo $t = 0$ in un autostato simultaneo di $\hat{J}^2$ e di $\hat{J}_z$ (dove $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ è il momento angolare totale) con autovalori $\frac{15}{4}\hbar^2$ e $-\frac{1}{2}\hbar$ rispettivamente.

Determinare a quali tempi t^* la probabilità che una misura di $\hat{J}^2$ dia come risultato il valore $\frac{3}{4}\hbar^2$ sia massima.

Problema 3

Indicando con $\hat{p}_x$ e $\hat{p}_y$ gli operatori impulso lungo le direzioni x ed y e con $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ l'operatore momento angolare lungo la direzione z

i. Calcolare i commutatori $C_1 = [\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2, \hat{L}_z]$ e $C_2 = [\hat{x}^2 + \hat{y}^2, \hat{L}_z]$

ii. Si consideri un oscillatore armonico isotropo in due dimensioni di Hamiltoniana $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y + 1)$ con $\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$ e $\hat{a}_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{y} + i\frac{\hat{p}_y}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$ gli operatori di abbassamento lungo le direzioni x e y. È possibile trovare autoket simultanei di $\hat{H}$ e $\hat{L}_z$?

iii. Nel caso di risposta affermativa al punto precedente, se un autoket simultaneo ha autovalore $2\hbar\omega$ per $\hat{H}$ quale autovalore può avere per $\hat{L}_z$?

Soluzione Problema 1

i. La funzione d'onda iniziale è

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\sqrt{\frac{1}{x_0}}e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

La Hamiltoniana $\hat{H}_2$ ha un solo autovalore negativo $E_0 = -\frac{ma^2}{2\hbar^2}$, relativo all'unico stato legato che ha funzione d'onda

$$\Phi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{x_\delta}}e^{-\frac{|x|}{x_\delta}}, \qquad x_\delta = \frac{\hbar^2}{ma}.$$

La probabilità richiesta è quindi data da $P = |c_0|^2$ con

$$c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Phi_0^*(x)\Psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\sqrt{\frac{1}{x_0}}\sqrt{\frac{1}{x_\delta}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{|x|}{x_\delta}}e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} = \frac{1}{\pi^{1/4}}\sqrt{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-|z|-\frac{1}{2}\lambda^2 z^2}$$

ii. Sviluppando l'integrale al secondo ordine in λ troviamo

$$c_0 \approx \frac{1}{\pi^{1/4}}\sqrt{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-|z|}(1-\frac{\lambda^2 z^2}{2}) = \frac{2}{\pi^{1/4}}\sqrt{\lambda}(1-\lambda^2)$$

Pertanto al terzo ordine in λ la probabilità cercata risulta essere

$$P = |c_0|^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(\lambda - 2\lambda^3)$$

Soluzione Problema 2

In base ai dati del problema lo stato iniziale risulta $|\psi_0\rangle = |j, m_j\rangle_{ls} = |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ con $l = 1$ and $s = 1/2$. Per determinare la sua evoluzione temporale dobbiamo scriverlo come combinazione lineare degli autoket di $\hat{H}$, che sono della forma $|1, m\rangle|\frac{1}{2}, m_s\rangle$ (con $m = -1, 0, 1$ e $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) e che hanno autovalori dell'energia $E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I}$. Dalla composizione dei momenti angolari abbiamo

$$|\psi_0\rangle = |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_{ls} = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle.$$

Pertanto il ket al tempo t risulta essere

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle e^{\frac{i\hbar t}{2I}}$$

La probabilità $P(t)$ che una misura di $\hat{J}^2$ su tale stato fornisca al tempo t il valore $\frac{3}{4}\hbar^2$ equivale alla probabilità che il sistema sia (a meno di un fattore di fase) nello stato

$$|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_{ls} = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,0\rangle|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1,-1\rangle|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle.$$

Quindi

$$\begin{aligned} P(t) &= |_{ls}\langle\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}|\psi(t)\rangle|^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 |1 - e^{\frac{i\hbar t}{2I}}|^2 = \frac{8}{9}|\sin(\frac{\hbar t}{4I})|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Questa probabilità è massimizzata (e vale $P = \frac{8}{9}$) ai tempi t^* in cui $\sin(\frac{\hbar t^*}{4I}) = \pm 1$. Pertanto risulta

$$t^* = \frac{4I\pi}{\hbar}(\frac{1}{2} + n) \tag{2}$$

con $n = 0, 1, 2 \ldots$

Soluzione Problema 3

i. Risulta

$$C_1 = [\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2, \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x] = [\hat{p}_x^2, \hat{x}]\hat{p}_y - [\hat{p}_y^2, \hat{y}]\hat{p}_x = 2\hat{p}_x[\hat{p}_x, \hat{x}]\hat{p}_y - 2\hat{p}_y[\hat{p}_y, \hat{y}]\hat{p}_x = -2i\hbar(\hat{p}_x\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{p}_x) = 0$$

$$C_2 = [\hat{x}^2 + \hat{y}^2, \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x] = -\hat{y}[\hat{x}^2, \hat{p}_x] + \hat{x}[\hat{y}^2, \hat{p}_y] = -2\hat{y}\hat{x}[\hat{x}, \hat{p}_x] + 2\hat{x}\hat{y}[\hat{y}, \hat{p}_y] = -2i\hbar(\hat{y}\hat{x} - \hat{x}\hat{y}) = 0$$

ii. La Hamiltoniana può essere riscritta come $\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$. Poichè sia la parte cinetica che quella potenziale commutano con $\hat{L}_z$ avremo $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$. Ne segue che $\hat{H}$ e $\hat{L}_z$ ammettono autokets simultanei.

iii. Gli autokets di $\hat{H}$ sono dati da $|n_x n_y\rangle = \frac{(\hat{a}_x^\dagger)^{n_x}}{\sqrt{n_x!}}\frac{(\hat{a}_y^\dagger)^{n_y}}{\sqrt{n_y!}}|00\rangle$ e hanno autovalore $\hbar\omega(n_x + n_y + 1)$. Quindi gli autokets di $\hat{H}$ con autovalore $2\hbar\omega$ sono $|10\rangle$ e $|01\rangle$. Dal punto precedente sappiamo che a partire da questi due kets deve essere possibile costruire due autokets di $\hat{L}_z$. Gli autovalori richiesti sono dunque dati dagli autovalori della matrice

$$\mathbb{L}_z = \begin{pmatrix} \langle 10|\hat{L}_z|10\rangle & \langle 10|\hat{L}_z|01\rangle \\ \langle 01|\hat{L}_z|10\rangle & \langle 01|\hat{L}_z|01\rangle \end{pmatrix}$$

Esprimendo gli operatori $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$ in termini degli operatori di abbassamento e innalzamento si trova $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{2i}[(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger) - (\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger)]$ da cui segue immediatemente che $\mathbb{L}_z = \hbar\sigma_y$ con σ_y la matrice di Pauli lungo la direzione y. Quindi gli gli autokets simultanei che hanno autovalore $2\hbar\omega$ per $\hat{H}$ hanno autovalori $\pm\hbar$ per $\hat{L}_z$.

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 27.09.2021

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Valeria Battistelli	2	1	8	11
Giorgia Luparelli	3	9	6	18
Manuela Montalto	2	7	4	13
Rahmani Jacopo Hassen	2	2	8	12

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.