Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 29 Gennaio 2020, tempo disponibile 2 ore e mezzo

---

Problema 1

Si consideri la Hamiltoniana in tre dimensioni per un elettrone immerso nel potenziale centrale generato da una carica positiva puntiforme Ze: $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$. Vi viene ricordato che il primo stato eccitato è quattro volte degenere e gli autostati degeneri sono

$$\Psi_{200}(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}\, Y_{00}(\theta,\varphi)$$

$$\Psi_{21m}(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}\, Y_{1m}(\theta,\varphi), \quad m = -1, 0, 1$$

dove $a_0 = \frac{\hbar^2}{Zme^2}$ è il raggio di Bohr e Y_{lm} sono le armoniche sferiche. Si consideri la piccola perturbazione $V(r) = \lambda\delta(r-l)$ con $l > 0$.
a) Calcolare la correzione all'energia al primo ordine in λ.
b) Per quali valori di l la degenerazione rimane quattro?

Problema 2

Sia dato un sistema a due livelli con Hamiltoniana H e autostati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ di energia rispettivamente $\hbar\omega$ e $2\hbar\omega$ (quindi $H|n\rangle = n\hbar\omega|n\rangle$ con $n = 1, 2$). Si consideri l'operatore A tale che

$$A|1\rangle = 3|1\rangle + 4i|2\rangle, \qquad A|2\rangle = -4i|1\rangle - 3|2\rangle$$

a) Determinare gli autovalori a_1 e a_2 di A.
b) Se al tempo zero una misura di A fornisce il valore a_1 qual'è la probabilità di misurare a_1 al tempo t? E quella di misurare a_2? E la somma delle due probabilità?

Problema 3

Una particella di massa m in una dimensione è descritta dall'Hamiltoniana $H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ dove

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & x < a \\ V_0 & x > a \end{cases}$$

Vi si fa osservare che la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico $\varphi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$ soddisfa $H(x)\varphi_0(x) = \frac{\hbar\omega}{2}\varphi_0(x)$ per $x < a$.
a) Se $V_0 > \frac{\hbar\omega}{2}$ qual'è la funzione più generale $\psi(x)$ che soddisfa $H(x)\psi(x) = \frac{\hbar\omega}{2}\psi(x)$ per $x > a$?
b) Per quale valore di V_0 esiste uno stato legato di energia $\hbar\omega/2$?
c) Se $V_0 < \frac{\hbar\omega}{2}$ qual'è la funzione più generale $\psi(x)$ che soddisfa $H(x)\psi(x) = \frac{\hbar\omega}{2}\psi(x)$ per $x > a$?
d) Nel caso $V_0 < \frac{\hbar\omega}{2}$ determinare l'autofunzione $\Phi(x)$ tale che $H(x)\Phi(x) = \frac{\hbar\omega}{2}\Phi(x)\ \forall x$.

Soluzione Problema 1

a) Essendo il potenziale centrale e le armoniche sferiche tra loro ortogonali la matrice 4×4 che rappresenta la perturbazione nella base degli autostati degeneri e' diagonale. Quindi le correzioni all'energie sono semplicemente date da

$$\delta E_0 = \int dr\, r^2 V(r) \int d\Omega\, |\Psi_{200}(r,\theta,\varphi)|^2 = \lambda \left(\frac{1}{2a_0}\right)^3 l^2 \left(2 - \frac{l}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{l}{a_0}}$$

$$\delta E_1 = \int dr\, r^2 V(r) \int d\Omega\, |\Psi_{21m}(r,\theta,\varphi)|^2 = \lambda \left(\frac{1}{2a_0}\right)^3 l^2 \left(\frac{l}{\sqrt{3}a_0}\right)^2 e^{-\frac{l}{a_0}}$$

La degenerazione è solo parzialmente rimossa poichè δE_1 non dipende da m

b) Affinchè la degenerazione rimanga quattro deve valere $\delta E_0 = \delta E_1$. Questo accade per $l = 0$ e per $l = \frac{2}{1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}} a_0$.

Soluzione Problema 2

a) L'operatore A ammette autovalore $a_1 = 5$ con autovettore normalizzato $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2i|1\rangle + |2\rangle\right)$ e autovalore $a_2 = -5$ con autovettore normalizzato $|\psi_2\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{i}{2}|1\rangle + |2\rangle\right)$.

b) Al tempo zero il sistema collassa in $|\psi_1\rangle$ e quindi lo stato al tempo t sarà $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2i|1\rangle + |2\rangle e^{-i\omega t}\right)$. La probabilità di misurare a_1 sarà dunque $P_1(t) = |\langle\psi_1|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{25}\left[17 + 8\cos(\omega t)\right]$ mentre quella di misurare a_2 sarà $P_2(t) = |\langle\psi_2|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{8}{25}\left[1 - \cos(\omega t)\right]$. La somma $P_1(t) + P_2(t)$ fa correttamente 1.

Soluzione Problema 3

a) La funzione richiesta è $\psi(x) = Ae^{-kx}$ con $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - \frac{\hbar\omega}{2})}$

b) Affichè esista uno stato legato di energia $\frac{\hbar\omega}{2}$ le funzioni $\varphi_0(x)$, $\psi(x)$ e le loro derivate $\varphi_0'(x)$, $\psi'(x)$ devono coincidere in $x = a$. Da $\varphi_0(a) = \psi(a)$ si trova $Ae^{-ka} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega a^2}{2\hbar}}$ mentre da $\varphi_0'(a) = \psi'(a)$ si trova $-kAe^{-ka} = -\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{m\omega a}{\hbar} e^{-\frac{m\omega a^2}{2\hbar}}$. Ricavando A dalla prima e sostituendo nella seconda troviamo la condizione $\frac{m\omega a}{\hbar} = k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - \frac{\hbar\omega}{2})}$ da cui si evince il valore richiesto $V_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$.

c) La funzione richiesta è $\psi(x) = Be^{iqx} + Ce^{-iqx}$ con $q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\frac{\hbar\omega}{2} - V_0)}$

d) Avendo ora due costanti B e C esisterà sempre una soluzione $\Phi(x)$ di energia $\frac{\hbar\omega}{2}$. Basterà infatti imporre le condizioni di raccordo $\varphi_0(a) = \psi(a)$ e $\varphi_0'(a) = \psi'(a)$ e la soluzione sarà $\Phi(x) = \varphi_0(x)$ per $x < a$ e $\Phi(x) = \psi(x)$ per $x > a$. Per le costanti B e C si trova facilmente

$$B = C^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{m\omega a}{2i\hbar q}\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega a^2}{2\hbar}} e^{-iqa}$$

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 29.01.2020

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Gian Maria Belardi	2	5	2	8
Luca Ferretti	2	5	4	11
Davide Rinaldi	5	3	1	9
Cristiano Ruggieri	0	5	9	14

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.