Esame di di Elementi di Fisica Teorica

Corso di Laurea in Scienza dei Materiali

Prova scritta del 29 Gennaio 2021, tempo disponibile 3 ore

Problema 1

Si consideri una particella di massa m in una dimensione descritta dalla funzione d'onda $\Psi(x)$. Sapendo che
1) in $x = 0$ la funzione d'onda è reale e positiva
2) la densità di probabilità $P(x)$ e la corrente di probabilità $J(x)$ sono date da

$$P(x) = e^{-|x/L|}\sqrt{1+(x/L)^2}, \qquad J(x) = \frac{\hbar}{m}\frac{1}{L}\frac{e^{-|x/L|}}{\sqrt{1+(x/L)^2}}$$

i. Determinare la funzione d'onda. (Suggerimento: Scrivere $\Psi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$ con ρ e θ funzioni reali. Si ricordi anche che $\frac{d}{dx}\text{atan}(x) = \frac{1}{1+x^2}$)
ii. Per quali valori di x la funziona d'onda è puramente immaginaria?

Problema 2

Un sistema si trova al tempo $t = 0$ in uno stato $|\psi\rangle$ che è una combinazione lineare dello stato fondamentale $|0\rangle$ e del primo stato eccitato $|1\rangle$ di un oscillatore armonico quantistico unidimensionale di Hamiltoniana $\hat{H}$, con frequenza ω e massa m.
i. Sapendo che la medie dell'energia, della posizione e dell'impulso su questo stato forniscono rispettivamente $\langle E\rangle = \frac{7}{6}\hbar\omega$, $\langle x\rangle = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$ e $\langle p\rangle = -\frac{1}{3}\sqrt{2m\hbar\omega}$, determinare $|\psi\rangle$ in termini di $|0\rangle$ e $|1\rangle$.
ii. Per $t > 0$ lo stato evolve secondo l'Hamiltoniana $\hat{H}$. Determinare la probabilità che al generico tempo t lo stato si trovi nello stato coerente $|\gamma\rangle = e^{-\frac{\gamma^2}{2}}e^{\gamma\hat{a}^\dagger}|0\rangle$ con γ reale.
iii. Spiegare perché tale probabilità non può mai essere 1.

Problema 3

Si consideri una particella di massa m su una sfera di raggio R avente Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2mR^2}$$

Sapendo che la misura dell'operatore $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ fornisce sempre il valore $2\hbar^2$
i. qual'è il valore più basso che puó fornire una misura dell'energia?
ii. quali sono gli autostati corrispondenti a questo valore più basso?
iii. Come viene corretto questo valore più basso se si accende la perturbazione $P(\theta,\phi) = \lambda\delta(\phi-\theta)$? (Si ricordi che $Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$. Utili identità sono $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\cos(2\theta) = 2(\cos\theta)^2 - 1$.)

Soluzione Problema 1

i. Scrivendo la funzione d'onda come nel suggerimento si trova $P(x) = \rho(x)^2$ e $J(x) = \frac{\hbar}{m}\rho(x)^2\frac{d\theta(x)}{dx}$. Avremo quindi $\rho(x) = \pm e^{-\frac{1}{2}|x/L|}(1+(x/L)^2)^{\frac{1}{4}}$. Per determinare il segno di ρ osserviamo che in $x = 0$ la funzione d'onda è reale e positiva. Scegliendo $\theta(0) = 0$ il segno di ρ deve essere $+$. La funzione $\theta(x)$ soddisfa

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{m}{\hbar}\frac{J(x)}{P(x)} = \frac{1}{L}\frac{1}{1+(x/L)^2}$$

Integrando ambo i membri e ricordando che abbiamo scelto $\theta(0) = 0$ si trova $\theta(x) = \text{atan}(x/L)$.
ii. Utilizzando la funzione $\theta(x)$ precedentemente determinata la funzione d'onda è puramente immaginaria solo per $x \to \pm\infty$.

Soluzione Problema 2

i. Il generico stato $|\psi\rangle$ può essere scritto come $|\psi\rangle = a|0\rangle + be^{i\theta}|1\rangle$ dove a e b sono reali e positive, e $-\pi \leq \theta < \pi$. La normalizzazione impone $a^2 + b^2 = 1$. Dalla condizione $\langle E\rangle = \frac{7}{6}\hbar\omega$ segue immediatamente $a^2 + 3b^2 = 7/3$, che messa a sistema con la condizione di normalizzazione fornisce $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Per determinare la fase dobbiamo usare le altre due informazioni. In particolare da quella sulla posizione troviamo $ab\cos\theta = \frac{1}{3}$ e quindi $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La soluzione fornisce $\theta = \pm\pi/4$. Per determinare il segno della fase dobbiamo usare l'informazione sull'impulso, che fornisce $ab\sin\theta = -\frac{1}{3}$ e quindi $\theta = -\pi/4$.
ii. Lo stato evoluto al tempo t risulta $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\omega}{2}t}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\pi/4}e^{-i\frac{3\omega}{2}t}|1\rangle$. La probabilità $P_\gamma(t)$ che lo stato $|\psi(t)\rangle$ si trovi nello stato coerente $|\gamma\rangle$ è data da $P_\gamma(t) = |\langle\psi(t)|\gamma\rangle|^2$, dove

$$\begin{aligned}\langle\psi(t)|\gamma\rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\omega}{2}t}\langle 0| + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\pi/4}e^{i\frac{3\omega}{2}t}\langle 1|\right)\left(e^{-\frac{\gamma^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\right) \\ &= e^{-\frac{\gamma^2}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\omega}{2}t} + \gamma\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\pi/4}e^{i\frac{3\omega}{2}t}\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

Pertanto la probabilità risulta

$$P_\gamma(t) = e^{-\gamma^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma(\cos\omega t + \sin\omega t)\right] \qquad (2)$$

iii. La probabilità $P_\gamma(t)$ non può mai essere 1 in quanto lo stato $|\psi(t)\rangle$ contiene solo gli stati $|0\rangle$ e $|1\rangle$, mentre lo stato coerente contiene *tutti* gli stati $|n\rangle$ con ampiezze diverse da zero.

Soluzione Problema 3

i. Riscriviamo la Hamiltoniana come $\hat{H} = \frac{\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2}{2mR^2}$. Poichè $\hat{L}^2$ fornisce con certezza $2\hbar^2$ deve essere $l = 1$ e quindi i possibili valori di $\hat{L}_z$ sono $\hbar m$ con $m = -1, 0, 1$. Utilizzando il fatto che $\hat{L}^2$ ed $\hat{L}_z$ commutano i possibili valori dell'energia sono $\frac{\hbar^2}{2mR^2}(2 - m^2)$. Quindi il valore piu' basso è $\frac{\hbar^2}{2mR^2}$.
ii. Gli autostati corrispondenti all'autovalore più basso sono $|1,1\rangle$ e $|1,-1\rangle$.
iii. La perturbazione va a correggere l'autovalore più basso. Per calcolare la correzione occorre preliminarmente determinare la matrice di elementi

$$P_{m,m'} = \lambda\int d\Omega\, Y^*_{1,m}(\theta,\phi)\delta(\phi-\theta)Y_{1,m'}(\theta,\phi) = \lambda\int_0^\pi d\theta\sin\theta\, Y^*_{1,m}(\theta,\theta)Y_{1,m'}(\theta,\theta).$$

Avremo quindi

$$P_{1,1} = P_{-1,-1} = \lambda\frac{3}{8\pi}\int_0^\pi d\theta(\sin\theta)^3 = \lambda\frac{3}{8\pi}\int_{-1}^1 dx(1-x^2) = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$P_{1,-1} = P_{-1,1} = \lambda \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi d\theta (\sin\theta)^3 e^{-2i\theta} = \lambda \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi d\theta (\sin\theta)^3 (\cos(2\theta) - i\sin(2\theta))$$

In quest'ultimo integrale la parte immaginaria è nulla in quanto $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ e $\int_0^\pi d\theta(\sin\theta)^4\cos\theta = 0$. Per quanto riguarda la parte reale usiamo che $\cos(2\theta) = 2(\cos\theta)^2 - 1$. Quindi $P_{1,-1} = P_{-1,1} = \lambda\frac{3}{8\pi}\int_{-1}^1 dx(1-x^2)(2x^2-1) = -\frac{3\lambda}{10\pi}$ Le correzioni all'energia sono allora date dagli autovalori della matrice

$$P = \frac{\lambda}{2\pi}\begin{pmatrix} 1 & -3/5 \\ -3/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che gli autovalori sono dati da $\frac{\lambda}{2\pi}(1 \pm \frac{3}{5})$.

PROVA SCRITTA ELEMENTI DI FISICA TEORICA DEL 29.01.2021

VALUTAZIONE

	esercizio 1	esercizio 2	esercizio 3	voto
Valeria Battistelli	1	4	4.5	9.5
Luca Ferretti	9.5	4	7.5	21
Giorgia Luparelli	1	2.5	1	4.5

Ammessi alla prova orale coloro con una votazione maggiore o uguale a 18.